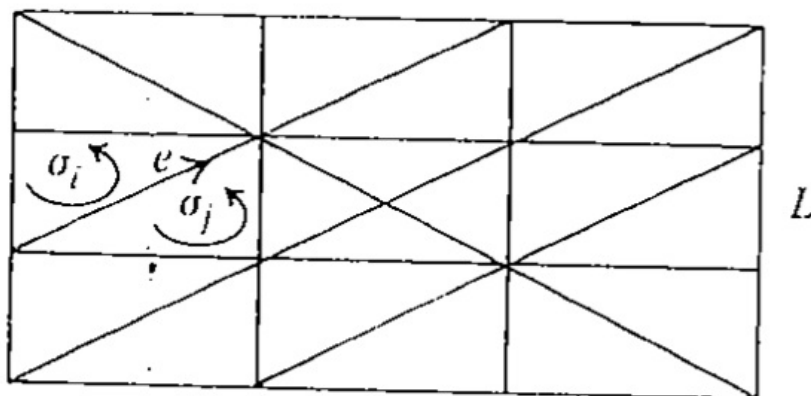


5 Grupy homologii powierzchni

Notacja 5.1. W dalszych rozważaniach będziemy pomijać index p w oznaczeniu operatora brzegowego δ_p i zamiast tego pisać po prostu δ tam, gdzie będzie jasne z kontekstu, o jaki operator chodzi.

Lemat 5.2. Niech L będzie kompleksem z następującej ilustracji:

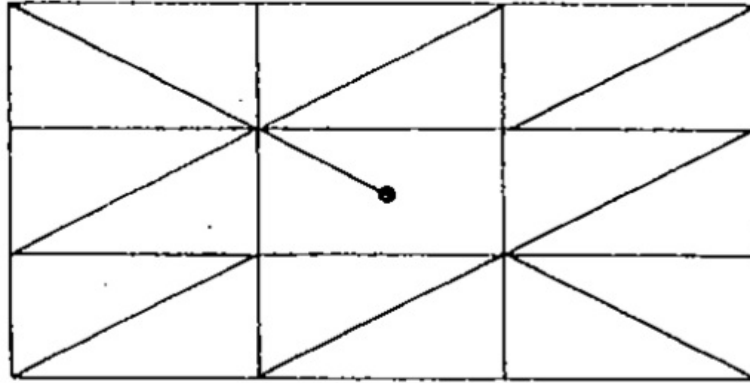


którego podległą przestrzenią jest prostokąt, niech $\text{Bd } L$ będzie kompleksem, którego podległą przestrzenią jest brzeg prostokąta. Wszystkie 2-sympleksy σ_i kompleksu L orientujemy przeciwnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, zaś 1-sympleksy orientujemy dowolnie. Wówczas

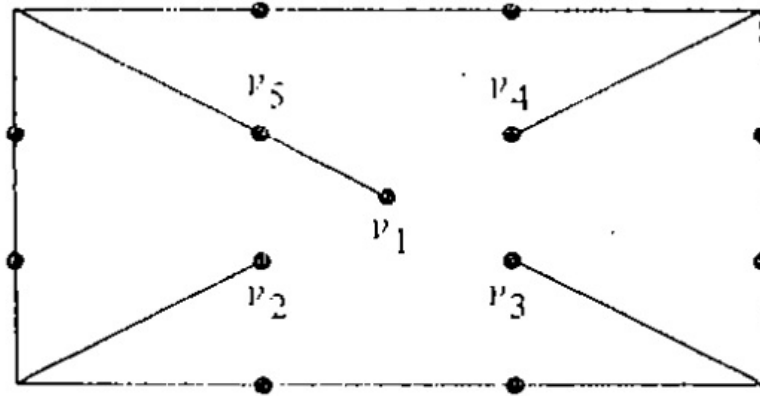
1. każdy 1-cykl kompleksu L jest homologiczny z 1-cyklem przenoszonym przez podkompleks $\text{Bd } L$;
2. jeżeli d jest 2-łańcuchem w L oraz δd jest przenoszony przez $\text{Bd } L$, to d jest wielokrotnością 2-łańcucha $\sum \sigma_i$.

Dowód. Zaczynamy od dowodu części 2. Jeżeli σ_i oraz σ_j mają wspólną krawędź e , to wówczas δd jest na e równe 0. Tym samym d przyjmuje taką samą wartość na σ_i oraz na σ_j . Kontynuując rozumowanie widzimy, że d musi mieć taką samą wartość na każdym zorientowanym 2-sympleksie σ_i .

Przechodzimy do dowodu części 1. Dla danego 1-łańcucha c w L , „wypychamy” go z kolejnych 1-sympleksów: najpierw sprawdzamy, że c jest homologiczny z 1-łańcuchem c_1 przenoszonym przez następujący podkompleks:

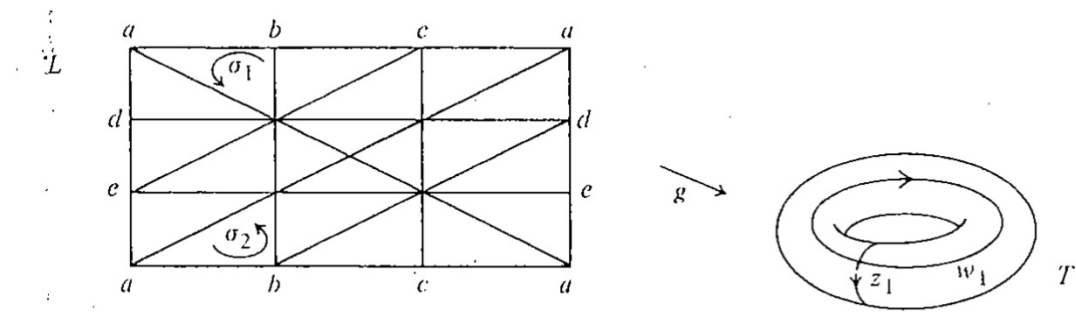


a następnie pokazujemy, że c_1 jest homologiczne z 1-łańcuchem c_2 przenoszonym przez następujący podkompleks:



Zauważmy, że w przypadku, gdy wejściowy łańcuch c jest cyklem, również i c_2 musi być cyklem. Tym samym c_2 musi być przenoszony przez $Bd L$, albowiem w przeciwnym razie c_2 miałby niezerowe współczynniki na co najmniej jednym z wierzchołków $v_1, \dots, v_5$. $\square$

Twierdzenie 5.3. Niech T będzie kompleksem reprezentowanym przez poniższy etykietowany prostokąt L , którego podległą przestrzenią jest torus:



Wówczas

$$H_1(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \text{ oraz } H_2(T) = \mathbb{Z}.$$

Zorientujmy ponadto każdy 2-sympleks L przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara i użyjmy tak powstałej orientacji do zorientowania 2-sympleksów T . Niech γ oznacza sumę 2-sympleksów w T i niech

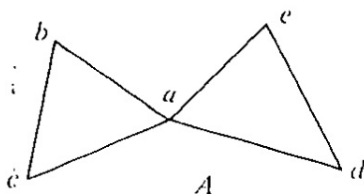
$$\begin{aligned} w_1 &= [a, b] + [b, c] + [c, a], \\ z_1 &= [a, d] + [d, e] + [e, a]. \end{aligned}$$

Wówczas γ generuje $H_2(T)$ oraz w_1 i z_1 tworzą bazę $H_1(T)$.

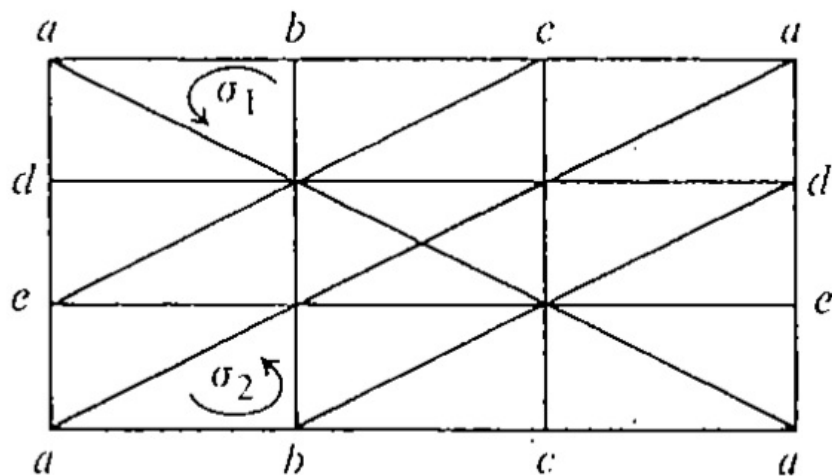
Dowód. Niech $g: |L| \rightarrow |T|$ będzie odwzorowaniem wklejającym, niech $A = g(|\text{Bd } L|)$. Wówczas A jest homeomorficzne z przestrzenią będącą sumą mnogościową dwóch okręgów przecinających się w jednym punkcie. Przyjmijmy dowolną orientację 1-sympleksów w T . Ponieważ g identyfikuje wyłącznie wierzchołki leżące w $\text{Bd } L$, argumenty takie, jak użyte w dowodzie Lematu 5.2 pokazują, że:

1. każdy 1-cykl T jest homologiczny z 1-cyklem przenoszonym przez A ,
 2. jeśli d jest 2-łańcuchem w T i δd jest przenoszone przez A , to d jest wielokrotnością γ
- Udowodnimy ponadto, że:
3. jeśli c jest 1-cyklem w T przenoszonym przez A , to c jest postaci $nw_1 + mz_1$,
 4. $\delta\gamma = 0$.

Aby pokazać 3. wystarczy zauważyć, że A jest 1-wymiarowym kompleksem takim, jak na poniższej ilustracji:



Aby udowodnić 4. zauważmy, że $\delta\gamma$ ma wartość 0 na każdym 1-sympleksie w T poza A . Bezpośrednio sprawdzamy też, że $\delta\gamma$ ma również wartość 0 na każdym 1-sympleksie w A : przykładowo, elementarny łańcuch $[a, b]$ pojawia się w wyrażeniu $\delta\sigma_1$ z wartością -1 oraz w wyrażeniu $\delta\sigma_2$ z wartością $+1$, tak więc $\delta\gamma$ przyjmuje wartość 0 na $[a, b]$:



Przystępujemy do obliczenia homologii T . Wobec 1. i 3. każdy 1-cykl w T jest homologiczny z 1-cyklem postaci $c = nw_1 + mz_1$. Cykl taki jest graniczący tylko wtedy, gdy jest trywialny: jeżeli bowiem $c = \delta d$ dla pewnego d , to wobec 2. otrzymujemy, że $d = p\gamma$ dla pewnego p , a ponieważ wobec 4. $\delta\gamma = 0$, więc $c = \delta d = 0$. Wobec tego

$$H_1(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

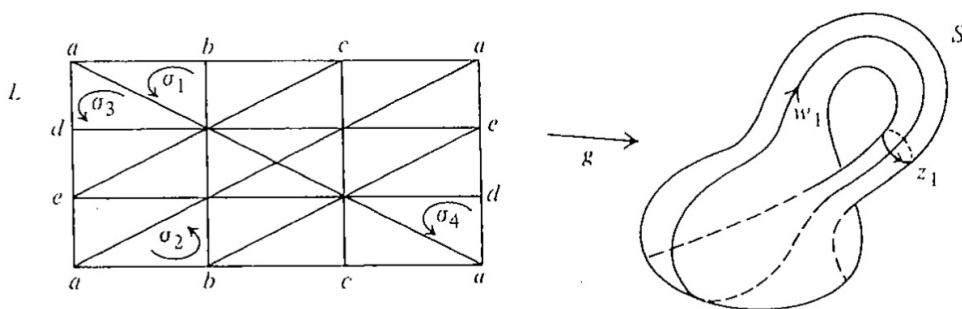
i warstwy wyznaczone przez 1-cykle w_1 i z_1 tworzą bazę 1-wymiarowej homologii.

Celem obliczenia $H_2(T)$ zauważmy, że, wobec 2., każdy 2-cykl d w T musi być postaci $p\gamma$ dla pewnego p . Wobec 4. każdy taki 2-łańcuch jest w istocie cyklem i nie istnieją 3-łańcuchy dla których mógłby graniczyć. Tym samym

$$H_2(T) = \mathbb{Z}$$

i generatorem tej grupy jest 2-cykl γ . □

Twierdzenie 5.4. Niech S będzie kompleksem reprezentowanym przez poniższy etykietowany prostokąt L , którego podległą przestrzenią jest butelka Kleina:



Wówczas

$$H_1(S) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 \text{ and } H_2(S) = 0.$$

Ponadto element torsyjny w $H_1(S)$ jest reprezentowany przez łańcuch z_1 , zaś generator $H_1(S)$ modulo część torsyjna jest reprezentowany przez łańcuch w_1 , gdzie:

$$\begin{aligned} z_1 &= [a, b] + [b, c] + [c, a], \\ w_1 &= [a, d] + [d, e] + [e, a]. \end{aligned}$$

Dowód. Niech $g: |L| \rightarrow |S|$ będzie odwzorowaniem wklejającym, niech $A = g(|\text{Bd } L|)$. Wówczas A jest homeomorficzne z przestrzenią będącą sumą mnogościową dwóch okręgów przecinających się w jednym punkcie. Przyjmijmy dowolną orientację 1-sympleksów w S oraz orientację 2-sympleksów taką, jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia. Własności 1. i 2. z dowodu poprzedniego twierdzenia się zachowują, jako że na żadną z nich nie wpływa rodzaj identyfikacji dokonywanych na brzegu prostokąta. Własność 3. również zachodzi, ponieważ A jest taki sam, jak w poprzednim dowodzie.

Zamiast własności 4. udowodnimy, że $\delta\gamma = 2z_1$. Wynika to z bezpośredniego rachunku: przykładowo, elementarny łańcuch $[a, b]$ pojawia się w $\delta\sigma_1$ ze współczynnikiem -1 , a w $\delta\sigma_2$ ze współczynnikiem $+1$, zaś w $\delta\sigma_3$ i $\delta\sigma_4$ z $+1$.

Przystępujemy do obliczenia homologii S . Wobec 1. i 3. każdy 1-cykl w S jest homologiczny z cyklem postaci $c = nw_1 + mz_1$. Jeżeli $c = \delta d$ dla pewnego d , to, wobec 2., $d = p\gamma$ dla pewnego p . Wobec tego $\delta d = 2pz_1$, a zatem $nw_1 + mz_1$ jest graniczący wtedy i tylko wtedy, gdy m jest parzyste oraz $n = 0$. Tym samym

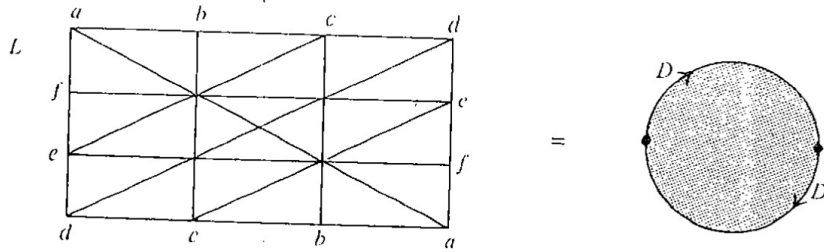
$$H_1(S) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Cykl z_1 reprezentuje element torsyjny, zaś w_1 generator nieskończonej grupy cyklicznej $H_1(S) / T_1(S)$.

Celem obliczenia $H_2(S)$, zauważmy, że każdy 2-cykl w S musi być formy $p\gamma$, wobec 2. Ponieważ $p\gamma$ nie jest cyklem, wobec własności 4. z dowodu poprzedniej części otrzymujemy

$$H_2(S) = 0. \quad \square$$

Twierdzenie 5.5. Niech P^2 będzie kompleksem reprezentowanym przez poniższy etykietowany prostokąt L , którego podległą przestrzenią jest płaszczyzna rzutowa:



Wówczas

$$H_1(P^2) \cong \mathbb{Z}/2 \text{ oraz } H_2(P^2) = 0.$$

Dowód. Niech $g: |L| \rightarrow |P^2|$ będzie odwzorowaniem wklejającym, niech $A = g(|\text{Bd } L|)$. Wówczas A jest homeomorficzne z okręgiem. Zorientujmy ponadto każdy 2-sympleks L przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara i użyjmy tak powstałej orientacji do zorientowania 2-sympleksów P^2 . Niech γ oznacza sumę 2-sympleksów w P^2 i niech

$$z_1 = [a, b] + [b, c] + [c, d] + [d, e] + [e, f] + [f, a].$$

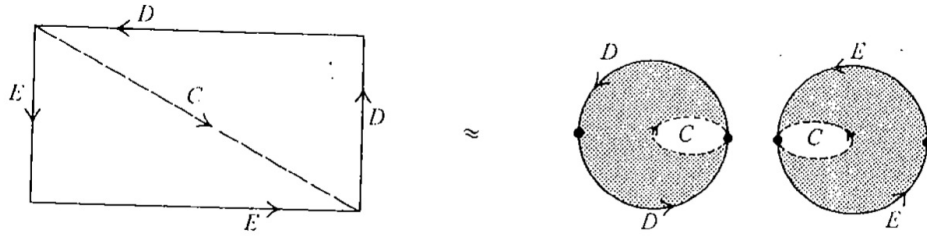
Własności 1. i 2. z poprzednich dowodów pozostają prawdziwe, natomiast zamiast własności 3. i 4. nietrudno sprawdzić, że każdy 1-cykl przenoszony przez A jest wielokrotnością z_1 oraz, że

$$\delta\gamma = -2z_1.$$

Z tych faktów bez trudu sprawdzamy, że $H_1(P^2) \cong \mathbb{Z}/2$ oraz $H_2(P^2) = 0$, przy czym niezerowy element $H_1(P^2)$ jest reprezentowany przez z_1 . $\square$

Definicja 5.6. Sumą spójną dwóch płaszczyzn rzutowych nazywamy przestrzeń powstałą z dwóch egzemplarzy płaszczyzny rzutowej przez wycięcie w każdym z nich otwartego dysku, a następnie sklejenie tak powstałych tworów wzdłuż wolnych krawędzi. Sumę spójną dwóch płaszczyzn rzutowych oznaczamy przez $P^2 \# P^2$.

Uwaga 5.7. Suma spójna dwóch płaszczyzn rzutowych może być reprezentowana jako przestrzeń ilorazowa prostokątu, którego krawędzie sklejo tak, jak na rysunku:



Twierdzenie 5.8. $H_1(P^2 \# P^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$ oraz $H_2(P^2 \# P^2) = 0$.

Dowód. Reprezentujemy $P^2 \# P^2$ jako przestrzeń ilorazowa prostokątu L tak jak w Uwadze 5.7. Niech $g: |L| \rightarrow |S|$ będzie odwzorowaniem wklejającym, niech $A = g(|\text{Bd } L|)$. Wówczas A jest homeomorficzne z przestrzenią będącą sumą mnogościową dwóch okręgów przecinających się w jednym punkcie. Niech w_1 będzie cyklem biegnącym wzdłuż „górnej krawędzi” L , zaś z_1 cyklem biegnącym wzdłuż „dolnej krawędzi” L . Własności 1. i 2. z poprzednich dowodów pozostają prawdziwe, natomiast zamiast własności 3. i 4. nietrudno sprawdzamy, że

każdy 1-cykl przenoszony przez A jest postaci $nw_1 + mz_1$

oraz

$$\delta\gamma = 2w_1 + 2z_1.$$

Jest jasne, że $H_2(P^2 \# P^2) = 0$. Celem obliczenia H_1 będziemy musieli wyznaczyć grupę ilorazową grupy G generowanej przez w_1 i z_1 przez podgrupę H generowaną przez $2(z_1 + w_1)$. W tym celu zauważmy, że $\{w_1, w_1 + z_1\}$ również jest bazą G . Wówczas $H_1(P^2 \# P^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$, jako że element torsyjny jest reprezentowany przez $w_1 + z_1$ oraz w_1 jest reprezentantem generatora H_1/T_1 . $\square$