

4 Grupy homologii

Definicja 4.1. Niech σ będzie sympleksem o wierzchołkach $a_0, a_1, \dots, a_n$. Dwa uporządkowania $a_{k_0} \leq_1 a_{k_1} \leq_1 \dots \leq_1 a_{k_n}$ oraz $a_{l_0} \leq_2 a_{l_1} \leq_2 \dots \leq_2 a_{l_n}$ jego wierzchołków są **równoważne**, jeżeli istnieje parzysta permutacja $\pi \in S(n)$ taka, że

$$l_i = \pi(k_i), \text{ dla } i \in \{0, \dots, n\}.$$

Uwaga 4.2. Relacja równoważności uporządkowań wierzchołków sympleksu jest, istotnie, równoważnością. Dla sympleksów σ o wymiarze $\dim \sigma > 0$ rozбивa ona zbiór wszystkich uporządkowań na dwie rozłączne klasy abstrakcji, zaś dla sympleksów zerowymiarowych wyznacza tylko jedną klasę abstrakcji.

Definicja 4.3. Klasę abstrakcji relacji równoważności uporządkowań wierzchołków sympleksu nazywamy **orientacją sympleksu**. Sympleks z ustaloną orientacją nazywamy **zorientowanym sympleksem**.

Notacja 4.4. Niech $a_0, a_1, \dots, a_n$ będą punktami geometrycznie niezależnymi. Sympleks generowany przez punkty $a_0, a_1, \dots, a_n$ będziemy oznaczać przez

$$a_0, a_1, \dots, a_n,$$

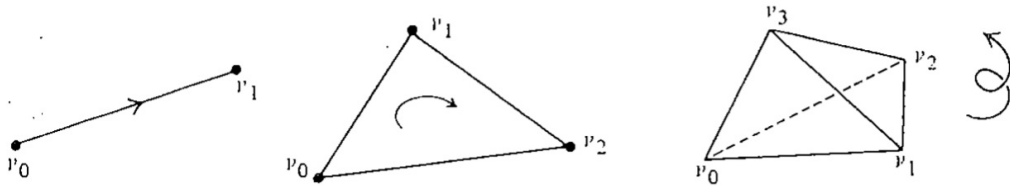
zorientowany sympleks o orientacji $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ przez

$$[a_0, a_1, \dots, a_n],$$

zaś klasę abstrakcji orientacji $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ przez

$$(a_0, a_1, \dots, a_n).$$

Przykład 4.5. Orientację sympleksu często będziemy oznaczać strzałkami. Zorientowany 1-sympleks $[v_0, v_1]$ będziemy po prostu zaznaczać strzałką biegnącą od v_0 do v_1 . Zorientowany 2-sympleks $[v_0, v_1, v_2]$ będziemy zaznaczać zaokrągloną strzałką wskazującą kierunek orientacji. Zorientowany 3-sympleks $[v_0, v_1, v_2, v_3]$ będziemy zaznaczać spiralną strzałką wskazującą kierunek orientacji zgodny z regułą lewego lub prawego kciuka:



Definicja 4.6. Niech K będzie kompleksem symplecjialnym. **p -łańcuchem** w K nazywamy funkcję ze zbioru zorientowanych p -sympleksów K w liczby całkowite spełniającą następujące dwa warunki:

1. $c(\sigma) = -c(\sigma')$ jeżeli σ i σ' są dwiema orientacjami tego samego sympleksu,
2. $c(\sigma) = 0$ dla prawie wszystkich p -sympleksów σ .

Grupę wszystkich p -łańcuchów (z działaniem dodawania wartości) nazywamy **grupą zorientowanych p -łańcuchów K** i oznaczamy $C_p(K)$. Dla $p < 0$ lub $p > \dim K$ przyjmujemy, że $C_p(K)$ jest trywialną grupą jednoelementową.

Dla zorientowanego sympleksu σ w K definiujemy **elementarny p -łańcuch** c odpowiadający σ następująco:

1. $c(\sigma) = 1$,
2. $c(\sigma') = -1$, jeżeli σ' jest inną orientacją σ ,
3. $c(\tau) = 0$, dla wszystkich różnych od σ sympleksów w K .

Uwaga 4.7. Nadużywając trochę notacji, będziemy często używać tego samego symbolu σ do oznaczenia sympleksu, zorientowanego sympleksu oraz elementarnego łańcucha odpowiadającego σ .

Lemat 4.8. $C_p(K)$ jest wolną grupą abelową. Dla każdej ustalonej orientacji wszystkich sympleksów $\sigma \in K$, rodzina odpowiadających im elementarnych p -łańcuchów tworzy bazę $C_p(K)$.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że dla ustalonej orientacji wszystkich sympleksów $\sigma \in K$, dowolny p -łańcuch można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy

$$c = \sum n_i \sigma_i,$$

gdzie σ_i oznaczają elementarne p -łańcuchy wyznaczone przez zadane orientacje. □

Uwaga 4.9. Grupa $C_0(K)$ ma naturalną bazę wyznaczoną przez jedyną orientację wszystkich 0-sympleksów w K . Grupy $C_p(K)$, dla $p > 0$, mają różne bazy wyznaczane przez różne możliwe orientacje.

Wniosek 4.10. Każda funkcja f odwzorowująca zorientowane p -sympleksy kompleksu K na grupę abelową G taka, że $f(-\sigma) = -f(\sigma)$ ma jednoznaczne przedłużenie do homomorfizmu grupy C_p na grupę G .

Dowód. Wynika wprost z własności uniwersalnej wolnych grup abelowych. □

Uwaga 4.11. Rozważmy odwzorowanie $\delta_p: C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ zdefiniowane w następujący sposób: jeżeli $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_p]$ jest zorientowanym sympleksem, $p > 0$, to

$$\delta_p \sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p],$$

gdzie symbol $\hat{v}_i$ oznacza, że wierzchołek v_i został pominięty. Wówczas δ_p jest dobrze określonym homomorfizmem. Dla $p < 0$ grupa $C_p(K)$ jest trywialna, a więc, w szczególności, dla $p \leq 0$ δ_p jest trywialnym homomorfizmem.

Dowód. Wobec Wniosku 4.10 wystarczy sprawdzić, że δ_p jest dobrze określoną funkcją taką, że $\delta_p(-\sigma) = -\delta_p(\sigma)$. W tym celu wystarczy sprawdzić, że prawa strona wzoru określającego δ_p zmienia znak, jeżeli w zorientowanym sympleksie $[v_0, v_1, \dots, v_p]$ zamienimy miejscami dwa sąsiednie wierzchołki. Powiedzmy, że zamieniamy miejscami wierzchołki v_j oraz v_{j+1} i rozważmy wartości

$$\delta_p[v_0, v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_p]$$

oraz

$$\delta_p[v_0, v_1, \dots, v_{j+1}, v_j, \dots, v_p]$$

Jeżeli $i \neq j, j+1$, to i -te składniki w każdym z powyższych wyrażeń różnią się od siebie znakiem: sympleksy

$$[v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_p]$$

oraz

$$[v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{j+1}, v_j, \dots, v_p]$$

mają przeciwnie orientacje.

Jeżeli $i = j$ lub $i = j + 1$, to i -te oraz $i + 1$ -sze składniki mają postać:

$$(-1)^j[v_0, v_1, \dots, v_{j-1}, \hat{v}_j, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_p] + (-1)^{j+1}[v_0, v_1, \dots, v_{j-1}, v_j, \widehat{v_{j+1}}, v_{j+2}, \dots, v_p]$$

oraz

$$(-1)^j[v_0, v_1, \dots, v_{j-1}, \widehat{v_{j+1}}, v_j, v_{j+2}, \dots, v_p] + (-1)^{j+1}[v_0, v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \hat{v}_j, v_{j+2}, \dots, v_p]$$

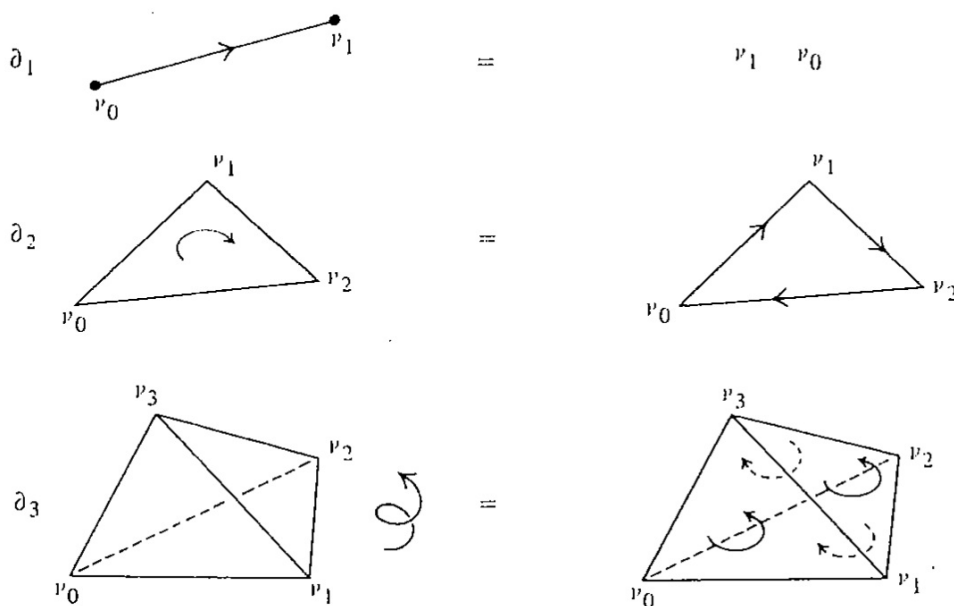
i również różnią się od siebie wyłącznie znakiem. □

Definicja 4.12. Homomorfizm zdefiniowany w Uwadze 4.11 będziemy nazywać **operatorem brzegowym**.

Przykład 4.13. Obliczmy przykładowe wartości operatora brzegowego:

$$\begin{aligned}\delta_1[v_0, v_1] &= v_1 - v_0; \\ \delta_2[v_0, v_1, v_2] &= [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]; \\ \delta_3[v_0, v_1, v_2, v_3] &= [v_1, v_2, v_3] - [v_0, v_2, v_3] + [v_0, v_1, v_3] - [v_0, v_1, v_2].\end{aligned}$$

Geometryczną interpretację powyższych obliczeń można zilustrować w następujący sposób:



Operatory brzegu powinny być znane z końcówki wykładu z analizy matematycznej, gdzie mówi się o twierdzeniach Greene'a, Stokesa i Gaussa i definiuje formy różniczkowe: faktycznie, wzory otrzymane powyżej to nic innego jak prawa działań na formach różniczkowych.

Dalej, sprawdzamy, że

$$\begin{aligned}\delta_1\delta_2[v_0, v_1, v_2] &= \delta_1([v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]) \\ &= v_2 - v_1 - v_2 + v_0 + v_1 - v_0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Geometrycznie możemy zinterpretować ten fakt następująco: każdy wierzchołek 2-sympleksu $[v_0, v_1, v_2]$ po zastosowaniu δ_2 pojawi się zarówno jako początek pewnego 1-sympleksu, jak i koniec innego 1-sympleksu. Po wyekstrahowaniu tej informacji operatorem δ_1 , otrzymamy pary przeciwnie zorientowanych wierzchołków, które w wolnej grupie abelowej dodadzą się do zera.

Podobnie sprawdzamy, że

$$\delta_2 \delta_3 [v_0, v_1, v_2, v_3] = 0.$$

Lemat 4.14. $\delta_{p-1} \circ \delta_p = 0$.

Dowód. Faktycznie:

$$\begin{aligned} \delta_{p-1} \delta_p [v_0, v_1, \dots, v_p] &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \delta_{p-1} [v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, \hat{v}_i, v_{i+1}, \dots, v_p] \\ &= \sum_{i=0}^p \sum_{j < i}^p (-1)^i (-1)^j [v_0, v_1, \dots, v_{j-1}, \hat{v}_j, v_{j+1}, \dots, v_{i-1}, \hat{v}_i, v_{i+1}, \dots, v_p] \\ &\quad + \sum_{i=0}^p \sum_{j > i}^p (-1)^i (-1)^{j-1} [v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, \hat{v}_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, \hat{v}_j, v_{j+1}, \dots, v_p] \end{aligned}$$

i widzimy, że składniki dwóch ostatnich sum pogrupowane parami upraszczają się do zera. $\square$

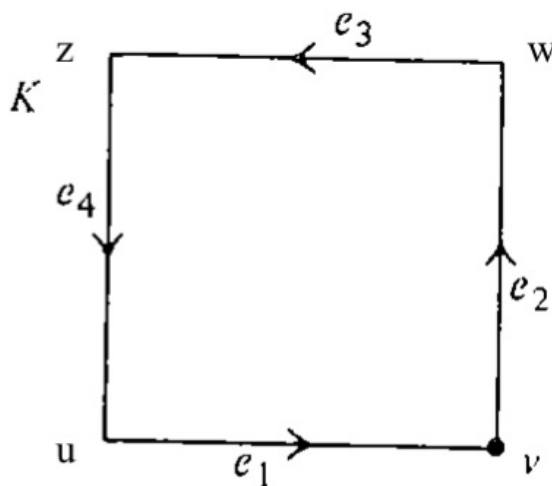
Wniosek 4.15. $\text{Im } \delta_{p+1} \subset \text{Ker } \delta_p \subset C_p(K)$.

Definicja 4.16. Grupę $\text{Ker } \delta_p$ nazywamy grupą **p-cykli** i oznaczamy $Z_p(K)$.

Grupę $\text{Im } \delta_{p+1}$ nazywamy grupą **p-brzegów** i oznaczamy $B_p(K)$.

Grupę $\text{Ker } \delta_p / \text{Im } \delta_{p+1}$ nazywamy **p-tą grupą homologii K** i oznaczamy $H_p(K)$.

Przykład 4.17. Rozważmy kompleks, którego podległą przestrzenią jest brzeg kwadratu o bokach e_1, e_2, e_3, e_4 :



$C_1(K)$ jest zatem wolną grupą abelową o randze 4. Jako bazę wybieramy 1-sympleksy zorientowane tak, jak na rysunku. Każdy 1-łańcuch c jest postaci

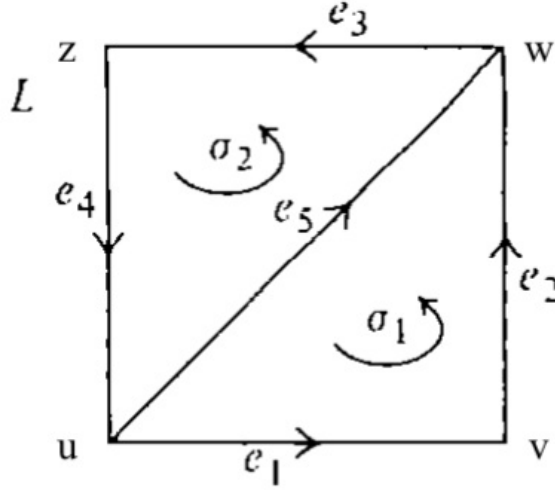
$$c = \sum n_i e_i.$$

Obliczmy wartość $\delta_1 c$:

$$\begin{aligned}
\delta_1 c &= \delta_1(n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3 + n_4 e_4) \\
&= \delta_1(n_1[u, v] + n_2[v, w] + n_3[w, z] + n_4[z, u]) \\
&= n_1(v - u) + n_2(w - v) + n_3(z - w) + n_4(u - z) \\
&= (n_1 - n_2)v + (n_2 - n_3)w + (n_3 - n_4)z + (n_4 - n_1)u.
\end{aligned}$$

Wobec tego $c \in \text{Ker } \delta_1 = Z_1(K)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n_1 - n_2 = n_2 - n_3 = n_3 - n_4 = n_4 - n_1 = 0$, czyli gdy $n_1 = n_2 = n_3 = n_4$, a zatem $Z(K)$ jest grupą cykliczną generowaną przez $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ i tym samym jest izomorficzna z $\mathbb{Z}$. Ponieważ K nie zawiera żadnych 2-sympleksów, więc $C_2(K)$ jest grupą trywialną i taka sama jest grupa $\text{Im } \delta_2 = B_1(K)$. Sprawdziliśmy więc, że pierwsza grupa homologii kwadratu równa jest $\mathbb{Z}/\{1\} \cong \mathbb{Z}$.

Przykład 4.18. Rozważmy kompleks, którego podległą przestrzenią jest kwadrat o bokach e_1, e_2, e_3, e_4 . Dla opisanego wszystkich sympleksów dorysujmy jeszcze przekątną e_5 :



$C_1(L)$ jest wolną grupą abelową o randze 5 i bazie złożonej z sympleksów zorientowanych jak krawędzie i przekątna na rysunku. Dla 1-lancucha $c = \sum n_i e_i$ obliczamy:

$$\begin{aligned}
\delta_1 c &= \delta_1(n_1[u, v] + n_2[v, w] + n_3[w, z] + n_4[z, u] + n_5[u, w]) \\
&= n_1(v - u) + n_2(w - v) + n_3(z - w) + n_4(u - z) + n_5(w - u) \\
&= (n_1 - n_2)v + (n_2 - n_3 + n_5)w + (n_3 - n_4)z + (n_4 - n_1 - n_5)u.
\end{aligned}$$

Wobec tego $c \in Z_1(L)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} n_1 - n_2 = 0 \\ n_2 - n_3 + n_5 = 0 \\ n_3 - n_4 = 0 \\ n_4 - n_1 - n_5 = 0, \end{cases}$$

co, jak łatwo sprawdzić, daje

$$\begin{cases} n_1 = n_2 \\ n_2 = n_2 \\ n_3 = n_2 + n_5 \\ n_4 = n_2 + n_5, \\ n_5 = n_5 \end{cases}$$

a zatem $c = n_2e_1 + n_2e_2 + (n_2 + n_5)e_3 + (n_2 + n_5)e_4 + n_5e_5 = n_2(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) + n_5(e_3 + e_4 + e_5)$. Wobec tego $Z_1(L)$ jest wolną grupą abelową o randze 2 i bazie $e_1 + e_2 + e_3 + e_4, e_3 + e_4 + e_5$. Z drugiej strony, z rysunku łatwo odczytujemy, że $e_3 + e_4 + e_5 = \delta_2\sigma_2$ oraz $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = \delta_2(\sigma_1 + \sigma_2)$, skąd $Z_1(L) \subset B_1(L)$. Tym samym $Z_1(L) = B_1(L)$ i wobec tego

$$H_1(L) = Z_1(L) / B_1(L) = \{1\}.$$

Obliczenie drugiej grupy homologii jest podobne jak w poprzednim przykładzie i zostawiamy je jako nietrudne ćwiczenie dla Czytelnika (wskazówka: grupa $C_3(L)$ jest trywialna, więc $B_2(L)$ też i wystarczy policzyć 2-cykle).

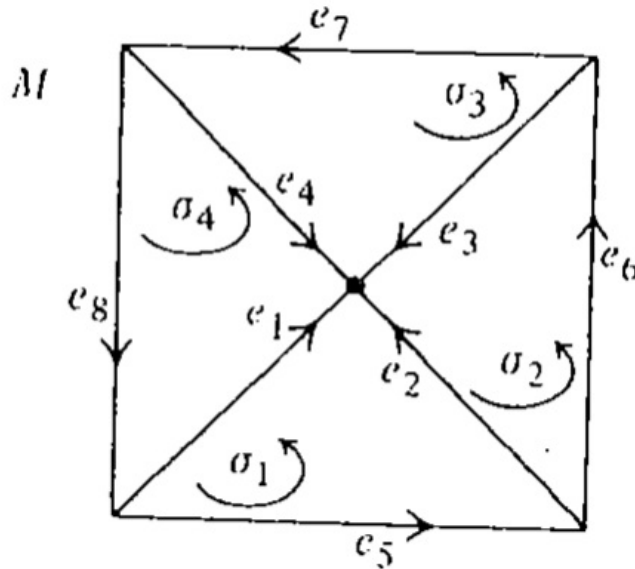
Definicja 4.19. Niech K będzie kompleksem, a L jego podkompleksem.

Mówimy, że łańcuch c jest **przenoszony** przez podkompleks L , jeżeli jego wartość jest równa 0 na każdym sympleksie, który nie należy do L .

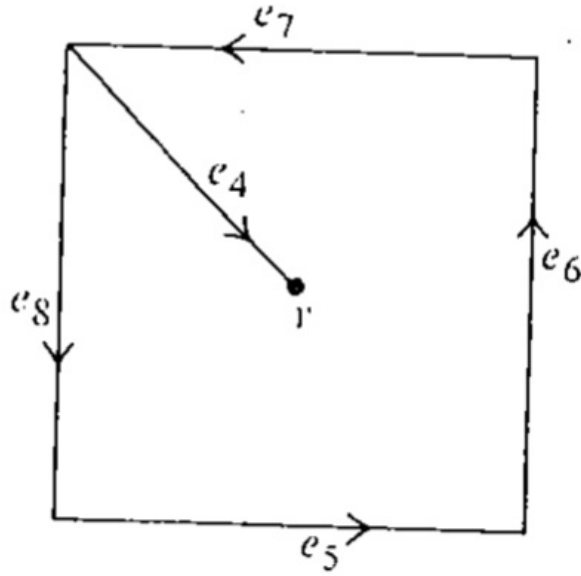
Mówimy, że p -łańcuchy c i c' są **homologiczne**, jeżeli $c - c' = \delta_{p+1}d$, dla pewnego $(p+1)$ -łańcucha d .

Mówimy, że p -łańcuch c jest **homologiczny do zera** (albo **graniczący**), jeżeli $c = \delta_{p+1}d$, dla pewnego $(p+1)$ -łańcucha d .

Przykład 4.20. Rozważmy kompleks, którego podległą przestrzeń ilustruje poniższy obrazek:



Obliczanie grupy 1-cykli można sobie trochę ułatwić. Dla danego 1-cyklu c , niech a będzie wartością c na e_1 . Rozważmy łańcuch $c_1 = c + \delta_2(a\sigma_1)$. Jak widać z rysunku (lub jak łatwo obliczyć), wartość c_1 na e_1 równa jest wtedy 0; możemy nieformalnie powiedzieć, że modyfikując c o brzeg, „wypchnęliśmy” go z e_1 . Podobnie możemy „wypchnąć” c_1 z e_2 : niech b będzie wartością c_1 na e_2 i niech $c_3 = c_1 + \delta_2(b\sigma_2)$. Wówczas wartość c_2 na e_2 jest równa 0. Zauważmy przy tym, że wartość c_2 na e_1 też jest równa 0, bo e_1 nie pojawia się ani w c_1 , ani w $\delta_2(b\sigma_2)$. Podobnie możemy zdefiniować c_3 „wypychając” c_2 z e_3 : c_3 będzie miał wartość 0 na e_1, e_2 i e_3 . Udowodniliśmy zatem, że dla danego 1-łańcucha c , istnieje homologiczny z nim łańcuch c_3 , który jest przenoszony przez podkompleks zilustrowany na poniższym obrazku:



Jeżeli c będzie cyklem, to c_3 również, a więc wartość c_3 na e_4 będzie musiała być równa 0. Tym samym 1-cykl kompleksu M będzie homologiczny z 1-cyklem przenoszonym przez brzeg kwadratu i, podobnie jak w poprzednim przykładzie, będzie jakąś wielokrotnością cyklu $e_5 + e_6 + e_7 + e_8$, który, z kolei, jest homologiczny do zera: $e_5 + e_6 + e_7 + e_8 = \delta_2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)$. Czyli, jak można się było spodziewać, $H_1(M) = 0$. Podobnie możemy sprawdzić, że $H_2(M) = 0$.

Powyższe dwa przykłady sugerują, że grupy homologii zależą wyłącznie od podległej przestrzeni; istotnie, jest to jedna z rzeczy, jakie udowodnimy w dalszym toku wykładu.