

3 Abstrakcyjne kompleksy sympleksyjne.

Uwaga 3.1. Niech J będzie dowolnym zbiorem indeksów, niech

$$\mathbb{R}^J = \{(x_\alpha)_{\alpha \in J} \mid J \ni \alpha \mapsto x_\alpha \in \mathbb{R}\}$$

będzie produktem kartezjańskim J kopii $\mathbb{R}$, niech

$$E^J = \{(x_\alpha)_{\alpha \in J} \in \mathbb{R}^J \mid x_\alpha = 0 \text{ dla prawie wszystkich } \alpha \in J\}.$$

$\mathbb{R}^J$ i E^J są przestrzeniami wektorowymi z działaniami zdefiniowanymi „po współrzędnych”. Przestrzeń E^J będziemy nazywali **uogólnioną przestrzenią euklidesową**. Jej bazą jest zbiór $\{\epsilon_\alpha \mid \alpha \in J\}$, przy czym funkcje ϵ_α zdefiniowane są następująco:

$$\epsilon_\alpha(\beta) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \beta = \alpha, \\ 0 & \text{jeśli } \beta \neq \alpha. \end{cases}$$

W E^J wprowadzamy topologię poprzez zdefiniowanie metryki ρ w następujący sposób:

$$\rho((x_\alpha)_{\alpha \in J}, (y_\alpha)_{\alpha \in J}) = \max \{ \|x_\alpha - y_\alpha\| \mid \alpha \in J \}.$$

Wszystko to, co zrobiliśmy z kompleksami w $\mathbb{R}^N$ uogólnia się na kompleksy w E^J : kompleksy będą tu rodzinami n -sympleksów, które wszelako mogą być nieskończone i nie mieć górnego ograniczenia na wymiar.

Definicja 3.2. *Abstrakcyjnym kompleksem sympleksyjnym* nazywamy rodzinę niepustych zbiorów $\mathcal{S}$ taką, że jeśli $A \in \mathcal{S}$, to również każdy niepusty podzbiór A należy do $\mathcal{S}$.

Element A kompleksu $\mathcal{S}$ nazywamy **sympleksem**, zaś jego liczbę elementów pomniejszoną o 1 nazywamy **wymiarem sympleksu**. **Wymiarem kompleksu $\mathcal{S}$** nazywamy maksimum wymiarów sympleksów składających się na $\mathcal{S}$ (lub ∞ , jeżeli takie maksimum nie istnieje). **Zbiorem wierzchołków V** kompleksu $\mathcal{S}$ nazywamy sumę mnogościową singletonów w $\mathcal{S}$. Podrodzinę rodziny $\mathcal{S}$, która sama jest kompleksem, będziemy nazywać **podkompleksem**.

Dwa kompleksy $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ nazywamy **izomorficznymi**, jeżeli istnieje bijekcja f pomiędzy zbiorem wierzchołków $\mathcal{S}$ i zbiorem wierzchołków $\mathcal{T}$ taka, że jeśli $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{S}$, to wówczas $\{f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_n)\} \in \mathcal{T}$.

Jeżeli K jest (zwykłym) kompleksem sympleksyjnym, zaś V zbiorem wierzchołków jego sympleksów, to niech $\mathcal{K}$ będzie rodziną takich podzbiorów V , że $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{K}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ generuje sympleks w K . Rodzinę $\mathcal{K}$ będziemy nazywać **schematem wierzchołkowym K** .

Twierdzenie 3.3.

1. Każdy abstrakcyjny kompleks sympleksyjny $\mathcal{S}$ jest izomorficzny ze schematem wierzchoł-

kowym pewnego kompleksu symplecjajnego K .

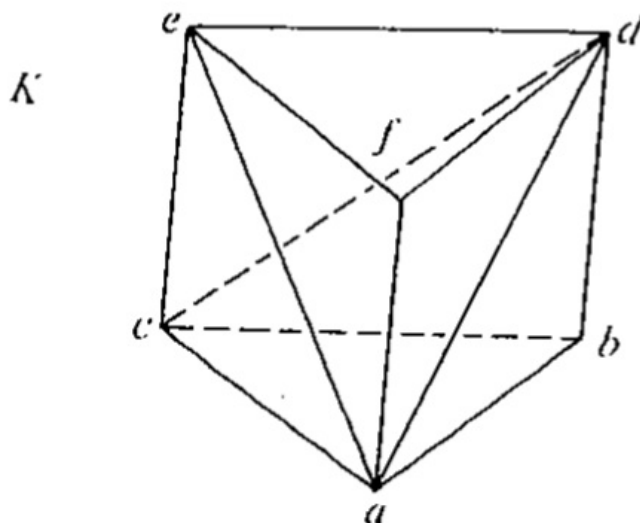
2. Dwa kompleksy symplecjajne są liniowo izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy ich schematy wierzchołkowe są izomorficzne jako abstrakcyjne kompleksy symplecjajne.

Dowód. Druga część twierdzenia wynika bezośrednio z Lematu 2.25, pozostaje więc udowodnić pierwszą część. Dla ustalonego zbioru indeksów J niech Δ^J oznacza zbiór wszystkich sympleksów w E^J generowanych przez skończone podzbiory bazy $\{\epsilon_\alpha \mid \alpha \in J\}$ przestrzeni E^J . Δ^J jest kompleksem symplecjajnym: jeżeli σ i τ są dwoma sympleksami w Δ^J , to suma mnogościowa ich wierzchołków jest zbiorem geometrycznie niezaleźnym, który generuje sympleks w Δ^J . Kompleks Δ^J będziemy nazywać nieskończeniewymiarowym sympleksem.

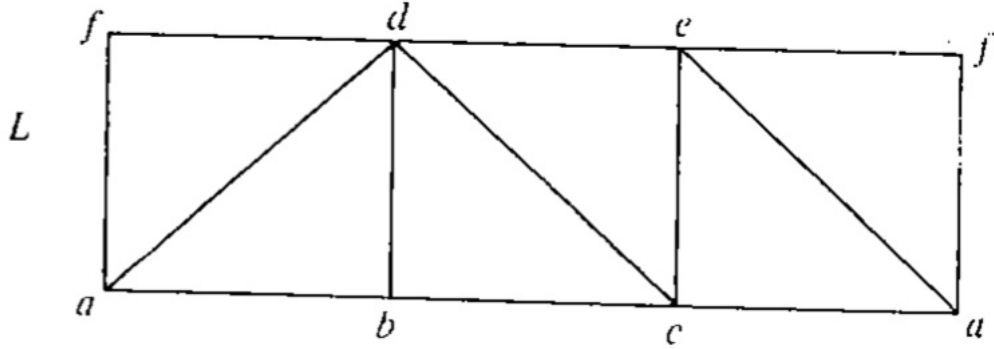
Ustalmy abstrakcyjny kompleks symplecjajny $\mathcal{S}$ ze zbiorem wierzchołków V . Niech J będzie zbiorem indeksów na tyle dużym, aby istniało zanurzenie $f: V \rightarrow \{\epsilon_\alpha\}_{\alpha \in J}$ (na przykład niech $J = V$). Zdefiniujmy podkompleks K kompleksu Δ^J następująco: jeśli $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ jest sympleksem w $\mathcal{S}$, to $\{f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_n)\}$ jest sympleksem w K . Bezpośrednio sprawdzamy, że $\mathcal{S}$ jest izomorficzny ze schematem wierzchołkowym K . $\square$

Definicja 3.4. Jeżeli abstrakcyjny kompleks $\mathcal{S}$ jest izomorficzny z kompleksem wierzchołkowym kompleksu K , to K nazywamy **geometryczną realizacją** $\mathcal{S}$. Geometryczna realizacja jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.

Przykład 3.5. Rozważmy kompleks symplecjajny K homeomorficzny z cylindrem $S^1 \times I$, gdzie $I = [0, 1]$. Możemy go zobrazować następująco:



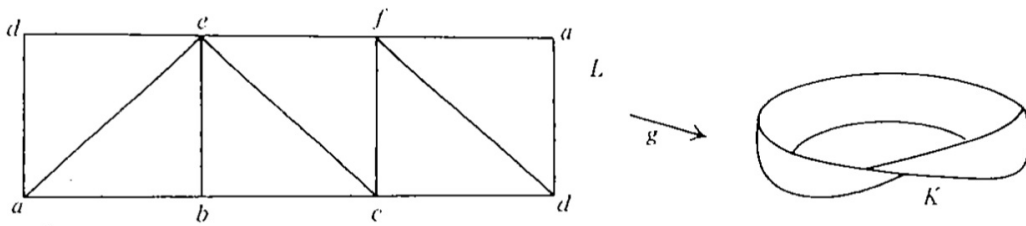
K jest rodziną złożoną z 6 sympleksów i ich ścian. Alternatywnie możemy ten sam kompleks zobrazować w poniższy sposób:



Na powyższą wizualizację składają się dwie rzeczy: kompleks L , którego podległą przestrzenią jest prostokąt oraz ustalone etykietowanie wierzchołków L (zauważmy, że niektóre wierzchołki mają taką samą etykietę). Będziemy rozważać ten diagram jako skróconą formę opisu abstrakcyjnego kompleksu $\mathcal{S}$, którego zbiór wierzchołków składa się z elementów a, b, c, d, e, f i którego sympleksy zdefiniowane są przez zbiory $\{a, f, d\}$, $\{a, b, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{c, d, e\}$, $\{a, c, e\}$, $\{a, e, f\}$ wraz z ich niepustymi podzbiorami. Jest jasne, że kompleks $\mathcal{S}$ jest izomorficzny ze schematem wierzchołkowym K , a więc (z dokładnością do linowego izomorfizmu) określa ten sam kompleks. Innymi słowy, kompleks K jest geometryczną realizacją $\mathcal{S}$.

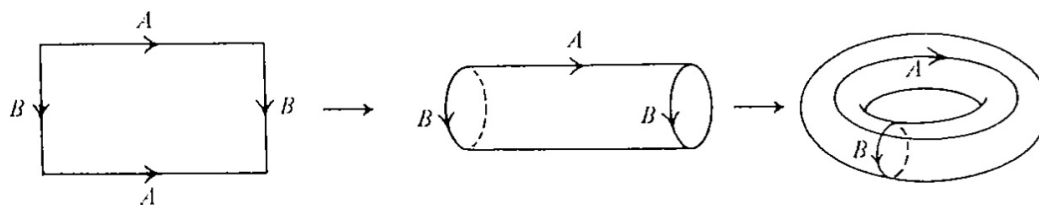
Niech $f: L^{(0)} \rightarrow K^{(0)}$ będzie odwzorowaniem, które każdemu wierzchołkowi L przyporządkowuje tak samo nazwany wierzchołek K . Wówczas f przedłuża się do odwzorowania symplecjialnego $g: |L| \rightarrow |K|$. Ponieważ jest to odwzorowanie pomiędzy zwartymi przestrzeniami Hausdorffa, g jest odwzorowaniem ilorazowym, które utożsamia prawą krawędź $|L|$ z lewą krawędzią $|L|$. Działanie g zgodne jest z tym, w jaki sposób zwijamy kartkę papieru, aby utworzyć z niej cylinder.

Uwaga 3.6. Rozważmy taki sam kompleks L jak w poprzednim przykładzie, ale z odmiennym etykietowaniem, które przedstawia następująca ilustracja:

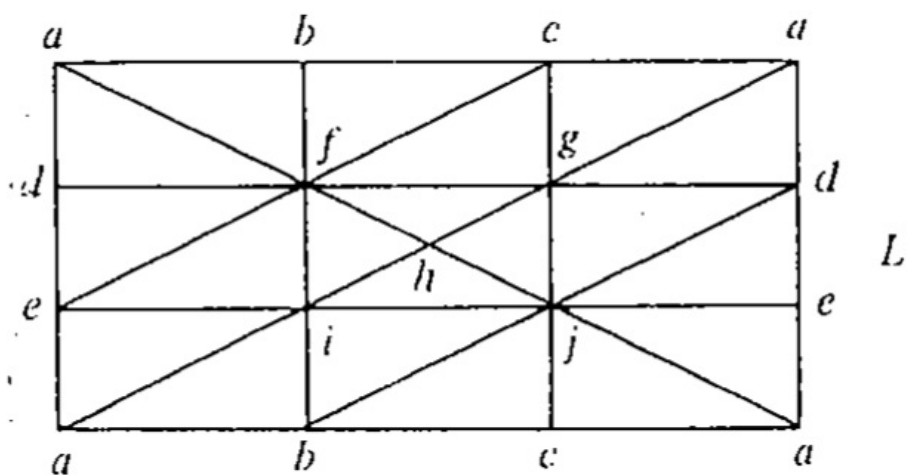


Tak jak poprzednio, powyższy diagram przedstawia pewien kompleks $\mathcal{S}$, którego sympleksy jesteśmy w stanie wypisać. Niech K będzie geometryczną realizacją tego kompleksu. Wierzchołki K odpowiadają etykietom a, b, c, d, e, f . Jeśli rozważymy liniowe odwzorowanie symplecjialne $f: |L| \rightarrow |K|$, które danemu wierzchołkowi L przyporządkowuje odpowiadający mu wierzchołek K , to otrzymamy odwzorowanie ilorazowe, które identyfikuje lewą krawędź $|L|$ z prawą krawędzią $|L|$ dokonując przy tym skręcenia. Otrzymana w rezultacie przestrzeń $|K|$ okazuje się więc być wstęgą Möbiusa.

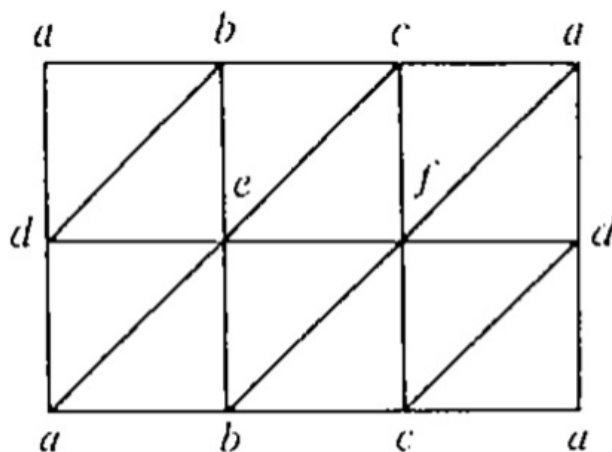
Przykład 3.7. Torus definiowany jest najczęściej jako przestrzeń ilorazowa otrzymywana z prostokąta w następujący sposób:



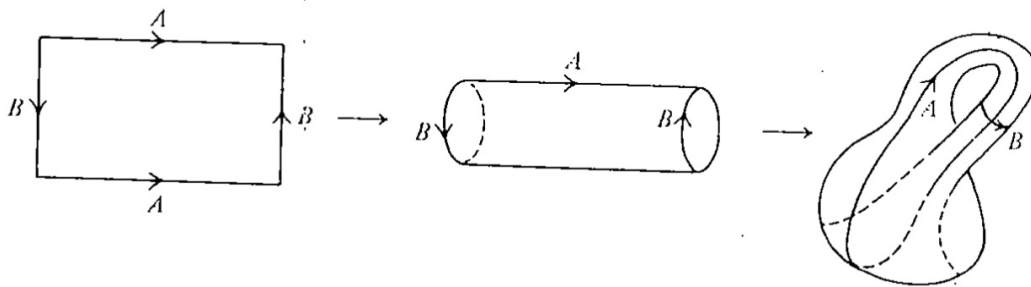
Możemy zatem skonstruować kompleks, którego podległa przestrzeń jest homeomorficzna z torusem, korzystając z następującego diagramu:



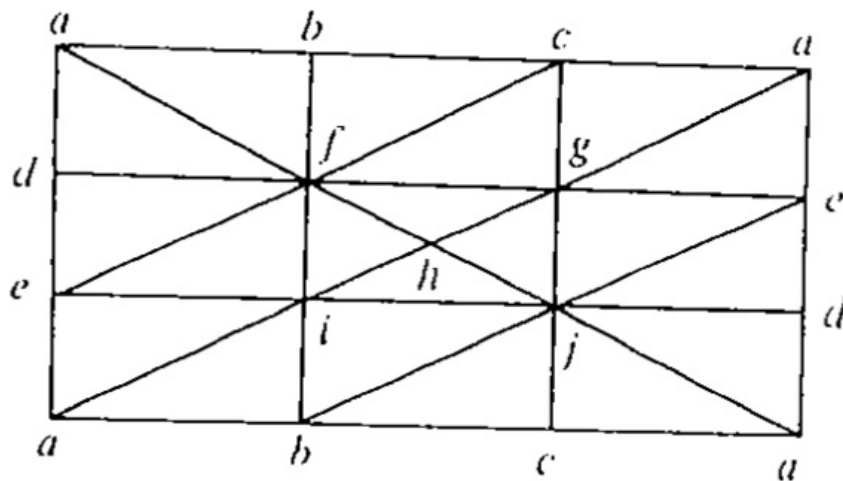
Przykład 3.8. Przy szukaniu kompleksów, których podległa przestrzeń ma być homeomorficzna z daną przestrzenią, należy zachować odrobinę ostrożności. Przykładowo, poniższy diagram, choć podobny do poprzedniego, wcale nie określa torusa:



Przykład 3.9. Butelka Kleina definiowana jest na ogół jako przestrzeń powstała z prostokąta dzięki następującym utożsamieniom:



Jak wiadomo, nie można jej zanurzyć w $\mathbb{R}^3$, ale potrafimy sobie wyobrazić, jak wygląda. Poniższy diagram ilustruje kompleks, którego podległa przestrzeń jest homeomorficzna z butelką Kleina:



Definicja 3.10. Niech L będzie skończonym kompleksem. **Etykietowaniem** wierzchołków L nazywamy dowolną surjekcję f odwzorowującą wierzchołki L na pewien zbiór, nazywany **zbiorem etykiet**. Etykietowaniu f odpowiada abstrakcyjny kompleks $\mathcal{S}$, którego wierzchołki są etykietami L , a sympleksy są zbiorami postaci $\{f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_n)\}$, gdzie $v_0, v_1, \dots, v_n$ generują sympleks w L . Odwzorowanie wierzchołków $L^{(0)}$ na $K^{(0)}$ zdefiniowane przez f przedłuża się do surjektywnego odwzorowania symplecjajnego $g: |L| \rightarrow |K|$. Będziemy mówić, że K jest kompleksem **otrzymanym z etykietowanego kompleksu L** oraz że g jest **stowarzyszonym odwzorowaniem wklejającym**.

Uwaga 3.11. Stowarzyszone odwzorowanie wklejające jest domkniętym odwzorowaniem ilorazowym.

Dowód. Ponieważ zarówno $|L|$ jak i $|K|$ są przestrzeniami Hausdorffa, g odwzorowuje zbiory domknięte na domknięte. $\square$

Definicja 3.12. Niech L będzie kompleksem. Podkompleks L_0 nazywamy **pełnym**, jeżeli każdy sympleks L , którego wierzchołki należą do L_0 , należy do L_0 .

Lemat 3.13. *Niech L będzie kompleksem, niech f będzie pewnym etykietowaniem jego wierzchołków, niech $g: |L| \rightarrow |K|$ będzie stowarzyszonym odwzorowaniem wklejającym, niech L_0 będzie pełnym podkompleksem L . Załóżmy, że jeśli v i w są wierzchołkami L o tej samej etykiecie, to*

1. *v i w należą do L_0 ;*
2. *$\overline{\text{St } v}$ oraz $\overline{\text{St } w}$ są rozłączne.*

Wówczas $\dim g(\sigma) = \dim \sigma$ dla wszystkich $\sigma \in L$. Ponadto, jeśli $g(\sigma_1) = g(\sigma_2)$, to σ_1 i σ_2 muszą być dwoma rozłącznymi sympleksami należącymi do L_0 .