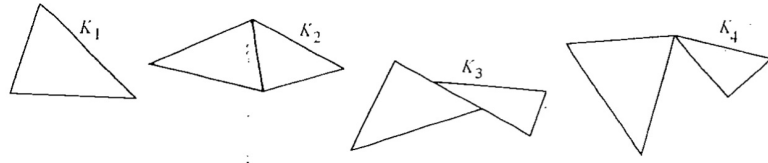


2. KOMPLEKSY SYMPLICJALNE I ODWZOROWANIA SYMPLICJALNE W $\mathbb{R}^N$.

Definicja 2.1. *Kompleksem symplecjajalnym w $\mathbb{R}^N$ nazywamy rodzinę sympleksów K w $\mathbb{R}^N$ taką, że*

1. *każda ściana każdego sympleksu w K należy do K ;*
2. *przecięcie dwóch sympleksów z K jest ścianą każdego z nich.*

Przykład 2.2. *Rodzina K_1 złożona z 2-sympleksu wraz z jego ścianami jest kompleksem. Rodzina K_2 złożona z dwóch 2-sympleksów o wspólnej ścianie i ich ściany jest kompleksem. Rodzina K_3 nie jest kompleksem, a K_4 jest:*



Lemat 2.3. *Rodzina sympleksów K jest kompleksem wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:*

1. *każda ściana każdego sympleksu w K należy w K ;*
2. *każda para różnych sympleksów w K ma rozłączne wnętrza.*

Dowód. Załóżmy, że K jest kompleksem symplecjajalnym. Warunek 1. jest częścią definicji. Dla dowodu warunku 2. załóżmy, że $\sigma, \tau \in K$ oraz że $x \in \text{Int } \sigma \cap \text{Int } \tau$. Wobec drugiej części definicji $s = \sigma \cap \tau \in K$. Gdyby s był właściwą ścianą σ , to wówczas $x \in \text{Bd } \sigma$, wbrew założeniu, a zatem $s = \sigma$. Analogicznie pokazujemy, że $s = \tau$.

Założmy, że spełnione są warunki 1. i 2. oraz że $\sigma, \tau \in K$, $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$. Oznaczmy przez σ' sympleks generowany przez wierzchołki $b_0, b_1, \dots, b_m$ sympleksu σ , które należą też do τ . Pokażemy, że $\sigma \cap \tau = \sigma'$. Inkluzja ($\supset$) jest oczywista, ponieważ $\sigma \cap \tau$ jest zbiorem wypukłym (jako przecięcie dwóch zbiorów wypukłych) i zawiera $b_0, b_1, \dots, b_m$, a zatem musi zawierać σ' (jako najmniejszy zbiór wypukły zawierający punkty $b_0, b_1, \dots, b_m$, por. Ćwiczenie 1.3). Dla dowodu inkluzji ($\subset$) ustalmy punkt $x \in \sigma \cap \tau$. Wówczas $x \in \text{Int } s \cap \text{Int } t$, dla pewnej ściany s sympleksu σ i pewnej ściany t sympleksu τ . Wobec warunku 2. $s = t$, a zatem wierzchołki s należą do τ , więc są którymiś z punktów $b_0, b_1, \dots, b_m$. Tym samym s jest ścianą σ' , a więc $x \in \sigma'$. $\square$

Wniosek 2.4. *Jeżeli σ jest sympleksem, to rodzina złożona z σ i wszystkich jego właściwych ścian jest kompleksem.*

Dowód. Warunek 1. Lematu 2.3 jest oczywisty, zaś warunek 2. jest spełniony wobec faktu, że dla $x \in \sigma$ istnieje dokładnie jedna ściana s sympleksu σ taka, że $x \in \text{Int } s$ (por. Uwaga 1.13). $\square$

Definicja 2.5. *Niech K będzie kompleksem symplecjajalnym. Podrodzina L rodziny sympleksów K zawierająca w szczególności wszystkie ściany wszystkich swoich elementów jest kompleksem symplecjajalnym, który nazywać będziemy **podkompleksem**. Podrodzina złożona z wszystkich sympleksów wymiaru co najwyżej równego p jest podkompleksem, który będziemy nazywać **p -szkieletem** kompleksu K i oznaczać przez $K^{(p)}$. W szczególności 0-szkielet $K^{(0)}$ jest zbiorem wierzchołków sympleksów w K .*

Definicja 2.6. *Niech X będzie przestrzenią topologiczną, niech $\mathcal{C} = \{C_i \mid i \in I\}$ będzie rodziną podzbiorów X , niech $Y \subset X$. Na każdym zbiorze C_i , $i \in I$, określamy topologię podprzestrzeni (tj. zbiór $V \subset C_i$ jest otwarty w C_i , jeżeli $V = C_i \cap U$, dla pewnego zbioru U otwartego w X). Na zbiorze Y określamy **topologię koherentną** względem $\mathcal{C}$ w następujący sposób: zbiór $A \subset Y$ jest otwarty w topologii koherentnej, jeżeli dla każdego C_i , $i \in I$, zbiór $A \cap C_i$ jest otwarty w C_i .*

Definicja 2.7. Niech K będzie pewną rodziną sympleksów. Oznaczmy przez $|K|$ podzbiór $\mathbb{R}^N$ równy sumie mnogościowej sympleksów z K . Na zbiorze $|K|$ określamy topologię koherentną względem rodziny K , którą w tym kontekście będziemy nazywać **przestrzenią podległą K** lub **wielokomórką K** . Jeżeli K jest kompleksem, wielokomórkę K będziemy nazywać **wielościannem K** .

Uwaga 2.8. Topologia przestrzeni podległej jest większa od topologii dziedziczonej z $\mathbb{R}^N$ (tzn. każdy podzbiór $|K|$ otwarty w topologii $\mathbb{R}^N$ jest też otwarty w topologii $|K|$).

Dowód. Niech $A \subset |K|$ będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^N$. Wówczas zbiór $\sigma \cap A$ jest otwarty w σ , dla każdego $\sigma \in K$, a więc, z definicji, jest też otwarty w $|K|$. $\square$

Przykład 2.9. Topologia przestrzeni podległej może być różna od topologii dziedziczonej. Rozważmy rodzinę sympleksów K złożoną z 1-sympleksów w $\mathbb{R}$ postaci $[m, m+1]$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, i postaci $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ wraz z wszystkimi ich ścianami. Wówczas zbiór $|K|$ jest równy $\mathbb{R}_+$ (zbiór dodatnich liczb rzeczywistych), ale topologie $|K|$ i $\mathbb{R}$ są różne: na przykład, zbiór $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$ jest domknięty w $|K|$ (dla każdego sympleksu $\sigma \in K$ przecięcie $A \cap \sigma$ jest albo zbiorem pustym, albo singletonem $\left\{\frac{1}{n}\right\}$), a więc zbiorem domkniętym w σ jako zbiór domknięty w $\mathbb{R}$, ale nie jest domknięty w $\mathbb{R}$ (granica ciągu $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ elementów zbioru A równa 0 nie jest elementem zbioru A).

Uwaga 2.10. Niech K będzie skończonym sympleksem symplecjajalnym. Wówczas topologia przestrzeni podległej K jest równa topologii dziedziczonej z $\mathbb{R}^N$.

Dowód. Załóżmy, że rodzina K jest skończona i $A \subset |K|$ jest zbiorem otwartym w $|K| = \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_k$. Wówczas $|K| \setminus A$ jest domknięty w $|K|$, czyli $(|K| \setminus A) \cap \sigma_i$ jest domknięty w σ_i , $i \in \{1, \dots, k\}$. Wobec tego $(|K| \setminus A) \cap \sigma_i = C_i \cap \sigma_i$, dla pewnego zbioru C_i domkniętego w $\mathbb{R}^N$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Ale $C_i \cap \sigma_i$ jest domknięty w $\mathbb{R}^N$ (jako przecięcie zbiorów domkniętych) i tym samym $|K| \setminus A = (C_1 \cap \sigma_1) \cup \dots \cup (C_k \cap \sigma_k)$ jest domknięty w $\mathbb{R}^N$ (jako skończona suma zbiorów domkniętych), więc A jest otwarty w $\mathbb{R}^N$. $\square$

Lemat 2.11. Jeżeli L jest podkompleksem K , to $|L|$ jest domkniętą podprzestrzenią $|K|$. W szczególności, jeśli $\sigma \in K$, to σ jest domkniętą podprzestrzenią $|K|$.

Dowód. Załóżmy, że zbiór A jest domknięty w $|L|$. Ustalmy $\sigma \in K$. Zbiór $\sigma \cap |L|$ jest sumą mnogościową tych ścian s_i sympleksu σ , które należą do L . Ponieważ A jest domknięte w $|L|$, zbiór $A \cap s_i$ jest domknięty w s_i , a zatem jest też domknięty w σ . Jako że $A \cap \sigma$ jest skończoną sumą zbiorów $A \cap s_i$, jest domknięty w σ . Wobec dowolności σ , A jest domknięty w $|K|$.

Założmy, że zbiór B jest domknięty w $|K|$. Wówczas $B \cap \sigma$ jest domknięty w σ dla wszystkich $\sigma \in K$, a więc w szczególności dla wszystkich $\sigma \in L$. Tym samym $B \cap |L|$ jest domknięty w $|L|$. $\square$

Lemat 2.12. Odwzorowanie $f: |K| \rightarrow X$ jest ciągle wtedy i tylko wtedy, gdy $f|_{\sigma}$ jest ciągle dla wszystkich $\sigma \in K$.

Dowód. Załóżmy, że f jest ciągle. Wówczas, ponieważ σ jest podprzestrzenią $|K|$, $f|_{\sigma}$ jest ciągle, $\sigma \in K$.

Założmy, że $f|_{\sigma}$ jest ciągle dla $\sigma \in K$. Jeżeli C jest domkniętym podzbiorem X , to wówczas $f^{-1}(C) \cap \sigma = (f|_{\sigma})^{-1}(C)$ jest zbiorem domkniętym w σ wobec ciągłości $f|_{\sigma}$. A zatem $f^{-1}(C)$ jest domknięty w $|K|$, wobec definicji topologii koherentnej. $\square$

Definicja 2.13. Niech x będzie punktem wielościannu $|K|$. Załóżmy, że jednoznacznie wyznaczony sympleks $\sigma \in K$ taki, że $x \in \text{Int } \sigma$ ma wierzchołki $a_0, a_1, \dots, a_n$. Niech $t_0, t_1, \dots, t_n$ oznaczają współrzędne barycentryczne x względem σ . Jeżeli v jest dowolnym wierzchołkiem K , to definiujemy **współrzędne barycentryczne** $t_v(x)$ punktu x względem v jako $t_v(x) = 0$, jeśli v nie jest jednym z wierzchołków $a_0, a_1, \dots, a_n$, oraz jako $t_v(x) = t_i$, jeśli $v = a_i$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Uwaga 2.14. Współrzędne barycentryczne są funkcjami ciągłymi na $|K|$.

Dowód. Dla ustalonych wierzchołka v oraz sympleksu $\sigma \in K$, funkcja $t_v|_{\sigma}$ jest ciągła, ponieważ jest albo identycznie równa 0, albo jest równa współrzędnym barycentrycznym w sympleksie (por. Ćwiczenie 1.1). Jest zatem ciągła na $|K|$ wobec Lematu 2.12. $\square$

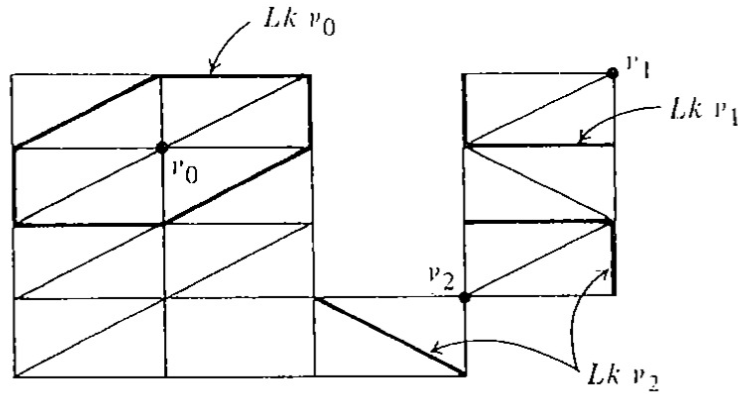
Lemat 2.15. $|K|$ jest przestrzenią Hausdorffa.

Dowód. Niech $x_0 \neq x_1$ będą dwoma rozłącznymi punktami w $|K|$ i niech v będzie wierzchołkiem takim, że $t_v(x_0) \neq t_v(x_1)$. Niech $r > 0$ będzie liczbą rzeczywistą pomiędzy $t_v(x_0), t_v(x_1)$. Wówczas $\{x \in |K| \mid t_v(x) < r\}$ oraz $\{x \in |K| \mid t_v(x) > r\}$ są dwoma rozłącznymi zbiorami otwartymi, do których należą, odpowiednio, punkty x_0 i x_1 . $\square$

Lemat 2.16. Jeżeli K jest skończony, to $|K|$ jest zwarty. Jeżeli zbiór $A \subset |K|$ jest zwarty, to istnieje skończony podkompleks $K_0 \subset K$ taki, że $A \subset |K_0|$.

Dowód. Jeżeli K jest skończony, to $|K|$ jest skończoną sumą zwartych podprzestrzeni, a więc jest zwarty. Jeżeli $A \subset |K|$ jest zwarty, to przypuśćmy, że A nie jest zawarty w żadnym wielościanie skończonego podkompleksu K . Dla $\sigma \in K$ wybierzmy punkt $x_{\sigma} \in A \cap \text{Int } \sigma$, o ile $A \cap \text{Int } \sigma \neq \emptyset$. Wobec przyjętej hipotezy, zbiór $B = \{x_{\sigma} \mid A \cap \text{Int } \sigma \neq \emptyset, \sigma \in K\}$ jest nieskończony. B jest też zbiorem dyskretnym (tzn. dla każdego punktu $x_{\sigma} \in B$ istnieje otoczenie tego punktu, które przecina się z B w punkcie x_{σ}). Dalej, przecięcie B z dowolnym sympleksem jest zbiorem skończonym, a więc domkniętym, a zatem B jest zbiorem domkniętym w $|K|$. Jako zbiór dyskretny i domknięty, B nie ma punktów skupienia, co daje sprzeczność, gdyż każdy nieskończony podzbiór przestrzeni zwartej ma punkt skupienia. $\square$

Definicja 2.17. Niech K będzie kompleksem symplecjajnym, a v jego wierzchołkiem. **Gwiazdą** wierzchołka v nazywamy sumę mnogościową wnętr wszystkich sympleksów K , dla których v jest jednym z wierzchołków i oznaczamy $\text{St } v$. **Domkniętą gwiazdą** v nazywamy domknięcie gwiazdy $\text{St } v$, które oznaczamy przez $\overline{\text{St } v}$ (w szczególności domknięta gwiazda jest sumą mnogościową wszystkich sympleksów, dla których v jest jednym z wierzchołków i jako taka jest wielościanem pewnego podkompleksu kompleksu K). **Łączem** wierzchołka v nazywamy zbiór $\overline{\text{St } v} \setminus \text{St } v$, który oznaczamy przez $\text{Lk } v$



Uwaga 2.18. Niech K będzie kompleksem symplecjajnym, a v jego wierzchołkiem.

1. $\text{St } v$ jest otwarty w $|K|$.
2. $\overline{\text{St } v}$, $|K| \setminus \text{St } v$, $\text{Lk } v$ są wielościanami podkompleksu kompleksu K .
3. $\text{St } v$ i $\overline{\text{St } v}$ są łukowo spójne.

Definicja 2.19. Kompleks symplecjajny K jest **lokalnie skończony**, jeżeli każdy wierzchołek K należy do skończonej liczby sympleksów z K .

Uwaga 2.20. Kompleks jest lokalnie skończony wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego jego wierzchołka v domknięta gwiazda $\overline{\text{St } v}$ jest wielościanem skończonego podkompleksu kompleksu K .

Lemat 2.21. *Kompleks K jest lokalnie skończony wtedy i tylko wtedy, gdy $|K|$ jest lokalnie zwarta (tzn. każdy punkt ma zwarte otoczenie).*

Dowód. Załóżmy, że K jest lokalnie skończony i ustalmy $x \in |K|$. Wówczas $x \in \text{St } v$, dla pewnego wierzchołka v , oraz $\overline{\text{St } v}$ jest zbiorem zwartym (jako skończona suma zbiorów domkniętych i ograniczonych).

Założmy, że $|K|$ jest lokalnie zwarta i ustalmy wierzchołek v . Niech C będzie zwartym otoczeniem v . Wtedy $C \cap \overline{\text{St } v}$ jest zbiorem zwartym, dla którego $\text{St } v$ jest pokryciem otwartym. Wobec tego $\text{St } v$ ma podpokrycie skończone, czyli v musi być wierzchołkiem skończenia wielu sympleksów. $\square$

Lemat 2.22. *Niech K i L będą kompleksami symplecjajnymi i niech $f: K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ będzie odwzorowaniem o tej własności, że jeśli wierzchołki $v_0, v_1, \dots, v_n$ generują sympleks w K , to wówczas wierzchołki $f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_n)$ generują sympleks w L . Wówczas f można przedłużyć do odwzorowania ciągłego $F: |K| \rightarrow |L|$ takiego, że jeśli*

$$x = \sum_{i=0}^n t_i v_i,$$

to wówczas

$$F(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i).$$

Dowód. Odwzorowanie F jest dobrze określone wobec przyjętych założeń. F jest ciągłe jako odwzorowanie na pojedynczych sympleksach, a zatem jest ciągłe jako odwzorowanie z pojedynczego sympleksu do $|L|$. Wobec Lematu 2.12 F jest ciągłe. $\square$

Definicja 2.23. *Odwzorowanie o własnościach takich, jak odwzorowanie F z Lematu 2.22 nazywamy **odwzorowaniem symplecjajnym**.*

Uwaga 2.24. Złożenie odwzorowań symplecjajnych jest odwzorowaniem symplecjajnym.

Lemat 2.25. *Niech K i L będą kompleksami symplecjajnymi i niech $f: K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ będzie bijekcją o tej własności, że jeśli wierzchołki $v_0, v_1, \dots, v_n$ generują sympleks w K , to wówczas wierzchołki $f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_n)$ generują sympleks w L . Wówczas indukowane odwzorowanie symplecjajne $F: |K| \rightarrow |L|$ jest homeomorfizmem.*

Dowód. Każdy sympleks σ w K jest odwzorowany na sympleks τ tego samego wymiaru w L . Pozostaje wykazać, że odwzorowanie $F^{-1}: |L| \rightarrow |K|$ indukowane przez odwzorowanie na wierzchołkach f^{-1} jest odwrotne do F . Niech $\sigma \in K$ będzie sympleksem generowanym przez $v_0, v_1, \dots, v_n$, niech $x \in \sigma$. Wówczas $x = \sum_{i=0}^n t_i v_i$ oraz $F(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i)$. Wobec tego

$$\begin{aligned} F^{-1} \circ F(x) &= F^{-1} \left(\sum_{i=0}^n t_i f(v_i) \right) = \sum_{i=0}^n t_i F^{-1}(f(v_i)) \\ &= \sum_{i=0}^n t_i v_i = x. \end{aligned}$$

$\square$

Definicja 2.26. *Odwzorowanie o własnościach takich, jak odwzorowanie F z Lematu 2.25 nazywamy **izomorfizmem symplecjajnym** lub **homeomorfizmem symplecjajnym**.*

Wniosek 2.27. *Niech Δ^N oznacza kompleks symplecjajny złożony z N -sympleksu i jego ścian. Jeżeli K jest skończonym kompleksem, to K jest izomorficzny z pewnym skończonym podkompleksem kompleksu Δ^N , dla pewnego $N \in \mathbb{N}$.*

Dowód. Niech $v_0, v_1, \dots, v_N$ będą wierzchołkami K . Niech $a_0, a_1, \dots, a_N$ będą geometrycznie niezależnymi punktami w $\mathbb{R}^N$ i niech Δ^N będzie kompleksem złożonym z sympleksu przez nie generowanym wraz ze wszystkimi ścianami. Odwzorowanie $v_i \xrightarrow{f} a_i$ przedłuża się do izomorfizmu K na podkompleks Δ^N . $\square$

2.1. Zadania.

Ćwiczenie 2.1. Niech K będzie kompleksem symplecjajnym, niech $\sigma \in K$. Kiedy $\text{Int } \sigma$ jest otwarty w $|K|$? Kiedy σ jest otwarty w $|K|$?

Ćwiczenie 2.2. Udowodnij, że $\text{St } v$ i $\overline{\text{St } v}$ są łukowo spójne.

Ćwiczenie 2.3. Udowodnij, że jeśli $F: |K| \rightarrow |L|$ jest odwzorowaniem symplecjajnym odwzorowującym wierzchołki sympleksu σ na wierzchołki sympleksu τ , to F odwzorowuje homeomorficznie pewną ścianę σ na pewną ścianę τ .

Ćwiczenie 2.4. Udowodnij, że $|K|$ jest metryzowalne wtedy i tylko wtedy, gdy K jest lokalnie skończony.

Ćwiczenie 2.5. Udowodnij, że $|K|$ jest przestrzenią normalną.