

1. SYMPLEKSY.

Definicja 1.1. Zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^N$ nazywamy **geometrycznie niezależnym**, jeżeli dla dowolnego ciągu skalarów $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$, jeśli

$$\sum_{i=0}^n t_i = 0$$

oraz

$$\sum_{i=0}^n t_i a_i = 0$$

to wówczas $t_0 = t_1 = \dots = t_n = 0$.

Punkty dodajemy i mnożymy przez skalary „po współrzędnych” tak, jakby to były wektory w $\mathbb{R}^N$: ściśle rzecz biorąc pracujemy w przestrzeni afinicznej, gdzie razem z wektorami występują też punkty:

Uwaga 1.2. Zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^N$ jest geometrycznie niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór wektorów $\{a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$ jest liniowo niezależny.

Dowód. Załóżmy, że zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^N$ jest geometrycznie niezależny. Ustalmy ciąg skalarów $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ i załóżmy, że

$$t_1(a_1 - a_0) + \dots + t_n(a_n - a_0) = 0.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} 0 &= t_1 a_1 - t_1 a_0 + \dots + t_n a_n - t_n a_0 \\ &= (-t_1 - \dots - t_n) a_0 + t_1 a_1 + \dots + t_n a_n. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$-t_1 - \dots - t_n + t_1 + \dots + t_n = 0,$$

więc wobec geometrycznej niezależności punktów $a_0, a_1, \dots, a_n$ otrzymujemy $t_1 = \dots = t_n = 0$.

Założmy, że zbiór wektorów $\{a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$ jest liniowo niezależny. Ustalmy ciąg skalarów $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ takich, że

$$t_0 + t_1 + \dots + t_n = 0$$

oraz

$$t_0 a_0 + t_1 a_1 + \dots + t_n a_n = 0.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} 0 &= t_0 a_0 + t_1 a_1 + \dots + t_n a_n \\ &= t_0 a_0 + t_1 a_1 + \dots + t_n a_n - (t_0 + t_1 + \dots + t_n) a_0 \\ &= t_1(a_1 - a_0) + \dots + t_n(a_n - a_0) \end{aligned}$$

więc wobec liniowej niezależności wektorów $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ uzyskujemy $t_1 = \dots = t_n = 0$. Na koniec, wobec $t_0 + t_1 + \dots + t_n = 0$, również $t_0 = 0$. $\square$

Przykład 1.3. Wobec Uwagi 1.2 natychmiast widzimy, że każde 2 rozłączne punkty są geometrycznie niezależne, podobnie jak każde 3 niewspółliniowe punkty, albo każde 4 niewspółpłaszczyznowe.

Definicja 1.4. *Płaszczyznę generowaną przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^N$ nazywamy zbiór*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x = \sum_{i=0}^n t_i a_i, t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^n t_i = 1\}.$$

Uwaga 1.5. Niech P będzie płaszczyzną generowaną przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Wówczas dla każdego punktu $x \in P$ istnieje dokładnie jeden ciąg skalarów $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ taki, że

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a_i \text{ oraz } \sum_{i=0}^n t_i = 1.$$

Dowód. Załóżmy, że dla pewnego punktu $x \in P$ istnieją ciągi $t_0, t_1, \dots, t_n$ oraz $s_0, s_1, \dots, s_n$ takie, że $x = \sum_{i=0}^n t_i a_i = \sum_{i=0}^n s_i a_i$ oraz $\sum_{i=0}^n t_i = \sum_{i=0}^n s_i = 1$.

Wówczas

$$\begin{aligned} 0 &= x - x \\ &= \sum_{i=0}^n t_i a_i - \sum_{i=0}^n s_i a_i \\ &= \sum_{i=0}^n (t_i - s_i) a_i \end{aligned}$$

oraz

$$\sum_{i=0}^n (t_i - s_i) = \sum_{i=0}^n t_i - \sum_{i=0}^n s_i = 1 - 1 = 0,$$

więc wobec geometrycznej niezależności punktów $a_0, a_1, \dots, a_n$ otrzymujemy $t_i = s_i$, dla $i \in \{0, \dots, n\}$. $\square$

Uwaga 1.6. Niech P będzie płaszczyzną generowaną przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Wówczas $a_0, a_1, \dots, a_n \in P$.

Uwaga 1.7. Niech P będzie płaszczyzną generowaną przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Wówczas

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid x = a_0 + \sum_{i=1}^n t_i (a_i - a_0), t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Innymi słowy, P jest płaszczyzną przechodzącą przez punkt a_0 i równoległą do wektorów $a_i - a_0$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dowód. Jeżeli $x = \sum_{i=0}^n t_i a_i$ dla pewnych $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ takich, że $\sum_{i=0}^n t_i = 1$, to wówczas

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=0}^n t_i a_i + a_0 - a_0 \\ &= a_0 + \sum_{i=0}^n t_i a_i - a_0 \sum_{i=0}^n t_i \\ &= a_0 + \sum_{i=1}^n t_i (a_i - a_0). \end{aligned}$$

Na odwrót, jeżeli $x = a_0 + \sum_{i=1}^n t_i (a_i - a_0)$, dla pewnych $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$, to wówczas

$$x = \left(1 - \sum_{i=1}^n t_i \right) a_0 + t_1 a_1 + \dots + t_n a_n$$

oraz $1 - \sum_{i=1}^n t_i + \sum_{i=1}^n t_i = 1$. $\square$

Uwaga 1.8. Niech P będzie płaszczyzną generowaną przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Wówczas jeżeli $w \notin P$, to zbiór $\{w, a_0, a_1, \dots, a_n\}$ jest geometrycznie niezależny.

Dowód. Przypuśćmy, że dla pewnych $s, t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ nie wszystkich równych zeru i takich, że $s + \sum_{i=0}^n t_i = 0$ zachodzi $sw + \sum_{i=0}^n t_i a_i = 0$. Zmieniając ewentualnie numerację możemy założyć, że $s \neq 0$. Wówczas

$$w = \sum_{i=0}^n \frac{-t_i}{s} a_i$$

oraz $\sum_{i=0}^n \frac{-t_i}{s} = \frac{s}{s} = 1$, a zatem $w \in P$, wbrew założeniu. $\square$

Definicja 1.9. *n-sympleksem* generowanym przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^N$ nazywamy zbiór

$$\sigma = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid x = \sum_{i=0}^n t_i a_i, t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_0 \geq 0, t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0 \right\}.$$

Uwaga 1.10. Niech σ będzie n -sympleksem generowanym przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Dla punktu $x \in \sigma$ jednoznacznie wyznaczone skalary $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ takie, że

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a_i,$$

$\sum_{i=0}^n t_i = 1$ oraz $t_0 \geq 0, t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0$ nazywamy **współrzednymi barycentrycznymi** punktu x względem $a_0, a_1, \dots, a_n$ i oznaczamy przez $t_0(x), t_1(x), \dots, t_n(x)$.

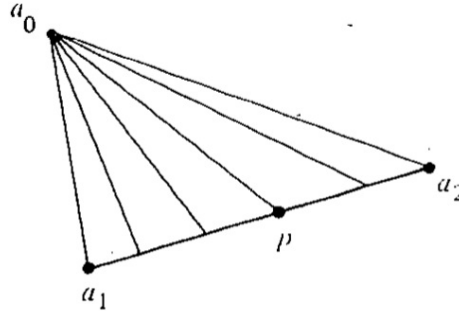
Przykład 1.11. 0-sympleks generowany przez punkt a_0 to po prostu punkt a_0 . 1-sympleks generowany przez punkty a_0 i a_1 to zbiór:

$$\begin{aligned} \sigma &= \{x \in \mathbb{R}^N \mid x = t_0 a_0 + t_1 a_1, t_0, t_1 \in \mathbb{R}, t_0 + t_1 = 1, t_0 \geq 0, t_1 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^N \mid x = t_0 a_0 + (1 - t_0) a_1, 0 \leq t_0 \leq 1\}, \end{aligned}$$

czyli odcinek łączący punkty a_0 i a_1 . Aby zobaczyć, czym jest 2-sympleks σ generowany przez punkty a_0, a_1, a_2 , zauważmy, że

$$\begin{aligned} \sigma &= \{x \in \mathbb{R}^N \mid x = t_0 a_0 + t_1 a_1 + t_2 a_2, t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_0 + t_1 + t_2 = 1, t_0 \geq 0, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid x = t_0 a_0 + s \underbrace{\left(\frac{t_1}{s} a_1 + \frac{t_2}{s} a_2 \right)}_P, t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_0 + t_1 + t_2 = 1, t_0 \geq 0, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0 \right\}, \end{aligned}$$

gdzie $s = t_1 + t_2$. Wobec tego $\frac{t_1}{s} + \frac{t_2}{s} = 1, \frac{t_1}{s} \geq 0, \frac{t_2}{s} \geq 0$, a zatem P jest punktem na odcinku łączącym punkty a_1 i a_2 . Dalej, $t_0 + s = 1$ oraz $s \geq 0$, więc x jest punktem leżącym na odcinku łączącym a_0 i P :



Tym samym 2-sympleks σ jest trójkątem rozpiętym między punktami a_0, a_1, a_2 . Dzięki podobnemu rozumowaniu możemy się przekonać, że 3-sympleks generowany przez punkty a_0, a_1, a_2, a_3 jest czworościanem o wierzchołkach a_0, a_1, a_2, a_3 ; przez indukcję możemy sobie też wyobrazić, jak wyglądają n -sympleksy w wyższych wymiarach.

Definicja 1.12. Niech σ będzie n -sympleksem generowanym przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Punkty $a_0, a_1, \dots, a_n$ nazywamy **wierzchołkami** sympleksu σ , a liczbę n jego **wymiarem**. Każdy sympleks generowany przez pewien podzbiór zbioru $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ nazywamy **ścianą** sympleksu σ . W szczególności ścianę sympleksu σ generowaną przez zbiór $\{a_1, \dots, a_n\}$ nazywamy ścianą leżącą **naprzeciw** wierzchołka a_0 . Ściany sympleksu σ różne od σ nazywamy **ścianami właściwymi**, a ich sumę mnogościową **brzegiem** sympleksu σ , oznaczanym przez $\text{Bd } \sigma$. **Wnętrze** sympleksu σ definiujemy jako $\sigma \setminus \text{Bd } \sigma$ i oznaczamy przez $\text{Int } \sigma$.

Uwaga 1.13. Niech σ będzie n -sympleksem generowanym przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Wówczas:

1. $\text{Bd } \sigma = \{x \in \sigma \mid \exists_{i_0 \in \{0, 1, \dots, n\}} t_{i_0}(x) = 0\}$;
2. $\text{Int } \sigma = \{x \in \sigma \mid \forall_{i \in \{0, 1, \dots, n\}} t_i(x) > 0\}$;
3. dla każdego punktu $x \in \sigma$ istnieje dokładnie jedna ściana s sympleksu σ taka, że $x \in \text{Int } s$.

Definicja 1.14. Niech $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. **Normą** z x nazywamy liczbę

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}.$$

Kulę N -jednostkową B^N definiujemy jako zbiór

$$B^N = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x\| \leq 1\},$$

zaś **sferę N -jednostkową S^{N-1}** jako zbiór

$$S^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x\| = 1\}.$$

Dalej, górną N -półsferę E_+^{N-1} definiujemy jako zbiór

$$E_+^{N-1} = \{x \in S^{N-1} \mid x_N \geq 0\},$$

a **dolną N -półsferę E_-^{N-1}** jako

$$E_-^{N-1} = \{x \in S^{N-1} \mid x_N \leq 0\}.$$

Przykład 1.15. B^0 jest punktem, B^1 przedziałem domkniętym $[-1, 1]$, a S^0 zbiorem dwupunktowym $\{-1, 1\}$. Kula 2-jednostkowa B^2 to koło o promieniu 1 i środku w początku układu współrzędnych, a sfera 2-jednostkowa S^1 to okrąg jednostkowy o środku w początku układu współrzędnych.

Definicja 1.16. **Promieniem** wychodzącym z punktu $w \in \mathbb{R}^N$ w kierunku punktu $p \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ nazywamy zbiór

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x = w + tp, t \geq 0\}.$$

Lemat 1.17. Niech $U \subset \mathbb{R}^N$ będzie zbiorem ograniczonym, wypukłym^{1.1} i otwartym, niech $w \in U$. Wówczas:

1. każdy promień wychodzący z w przecina $\text{Bd } U = \overline{U} \setminus U$ w dokładnie jednym punkcie;
2. istnieje homeomorfizm pomiędzy $\overline{U}$ oraz B^N , który odwzorowuje $\text{Bd } U$ na S^{N-1} .

Dowód.

1. Niech $\mathcal{R}$ będzie promieniem wychodzącym z punktu w . Zbiór $\mathcal{R} \cap U$ jest wypukły (jako przecięcie dwóch zbiorów wypukłych), ograniczony (jako podzbiór zbioru ograniczonego) oraz otwarty w $\mathcal{R}$ (jako przecięcie $\mathcal{R}$ ze zbiorem otwartym). Wobec tego

$$\mathcal{R} \cap U = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x = w + tp, t \in [0, a)\},$$

gdzie $p \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}$. Tym samym $\mathcal{R} \cap (\overline{U} \setminus U) = \{w + ap\} = \{x\}$.

Przypuśćmy, że $\mathcal{R}$ przecina $\text{Bd } U$ także w innym punkcie, powiedzmy y . Pokażemy, że x leży na promieniu $\mathcal{R}$ pomiędzy w i y : stąd będzie wynikało, że $x = y$. Istotnie, $y = w + bp$, dla pewnego $b > a$. Stąd $p = \frac{1}{b}y - \frac{1}{b}w$ oraz $p = \frac{1}{a}x - \frac{1}{a}w$, czyli $\frac{1}{b}y - \frac{1}{b}w = \frac{1}{a}x - \frac{1}{a}w$, lub, równoważnie

$$x = (1-t)w + ty,$$

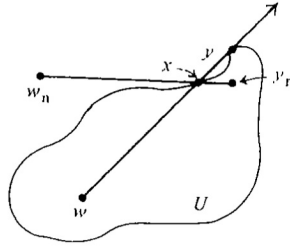
gdzie $t = \frac{a}{b}$, a więc

$$w = \frac{x - ty}{1 - t}.$$

Niech $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów zbioru U zbieżnym do y i niech

$$w_n = \frac{x - ty_n}{1 - t}.$$

^{1.1} Zbiór $A \subset \mathbb{R}^N$ nazywamy **wypukłym**, jeżeli wraz z punktami $x, y \in A$, do A należą też wszystkie punkty odcinka łączącego x z y .



Ciąg $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do w , a zatem $w_{n_0} \in U$, dla pewnego n_0 . Ale wówczas, skoro $x = tw_n + (1-t)y_n$, punkt x należy do U , ponieważ U jest wypukły. W ten sposób otrzymujemy sprzeczność.

2. Przyjmijmy dla uproszczenia notacji, że $w = 0$. Jest jasne, że funkcja $f: \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \rightarrow S^{N-1}$ dana wzorem

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

jest ciągłą surjekcją. Wobec udowodnionej już części lematu, zwięźenie $f|_{\text{Bd } U}$ funkcji f do $\text{Bd } U$ jest bijekcją pomiędzy $\text{Bd } U$ oraz S^{N-1} . Ponieważ $\text{Bd } U$ jest zbiorem zwartym (jako zbiór domknięty i ograniczony w $\mathbb{R}^N$), więc $f|_{\text{Bd } U}$ jest homeomorfizmem (jako ciągła bijekcja pomiędzy dwoma zbiorami zwartymi a przestrzenią Hausdorffa – S^{N-1} jest zwarty, jako domknięty i ograniczony w $\mathbb{R}^N$, a więc w szczególności jest to przestrzeń Hausdorffa). Oznaczmy przez $g: S^{N-1} \rightarrow \text{Bd } U$ odwzorowanie odwrotne do f . Zdefiniujmy rozszerzenie $G: B^N \rightarrow \bar{U}$ funkcji g następującym wzorem:

$$G(x) = \begin{cases} \left\| g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| x, & \text{jeśli } x \neq 0, \\ 0, & \text{jeśli } x = 0. \end{cases}$$

Funkcja G odwzorowuje liniowo odcinek łączący punkt 0 z punktem u na sferze S^{N-1} na odcinek łączący punkt 0 z punktem $g(u)$. W oczywisty sposób funkcja ta jest ciągła w każdym punkcie $x \neq 0$. Aby udowodnić, że jest też ciągła w $x = 0$, ustalmy $\epsilon > 0$ i niech M będzie taką liczbą, że $\left\| g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| < M$ jeżeli $\|x\| < \epsilon$. Niech $\delta = \frac{\epsilon}{M}$. Wówczas, jeśli $\|x - 0\| < \delta$, to:

$$\|G(x) - G(0)\| = \left\| g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) x \right\| = \left\| g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \|x\| < M\delta = \epsilon. \quad \square$$

Wniosek 1.18. Niech σ będzie n -sympleksem generowanym przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Wówczas istnieje homeomorfizm pomiędzy σ oraz B^n , który odwzorowuje $\text{Bd } \sigma$ na S^{n-1} .

Definicja 1.19. Funkcję $T: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ nazywamy **odwzorowaniem afinicznym**, jeżeli jest złożeniem translacji (tj. funkcji postaci $T(x) = p + x$, gdzie p jest pewnym ustalonym punktem) i nieosobliwych odwzorowań liniowych (tj. odwzorowań liniowych o zerowym jądrze).

Uwaga 1.20. Niech $T: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ będzie odwzorowaniem afinicznym, niech P będzie płaszczyzną generowaną przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Wówczas $\{T(a_0), T(a_1), \dots, T(a_n)\}$ jest zbiorem geometrycznie niezależnym, zaś $T(P)$ jest płaszczyzną generowaną przez zbiór $\{T(a_0), T(a_1), \dots, T(a_n)\}$.