

Definicja 1. Niech σ będzie sympleksem o wierzchołkach $a_0, a_1, \dots, a_n$. Dwa uporządkowania $a_{k_0} \leq_1 a_{k_1} \leq_1 \dots \leq_1 a_{k_n}$ oraz $a_{l_0} \leq_2 a_{l_1} \leq_2 \dots \leq_2 a_{l_n}$ jego wierzchołków są **równoważne**, jeżeli istnieje parzysta permutacja $\pi \in S(n)$ taka, że

$$l_i = \pi(k_i), \text{ dla } i \in \{0, \dots, n\}.$$

Uwaga 2. Relacja równoważności uporządkowań wierzchołków sympleksu jest, istotnie, równoważnością. Dla sympleksów σ o wymiarze $\dim \sigma > 0$ rozbija ona zbiór wszystkich uporządkowań na dwie rozłączne klasy abstrakcji, zaś dla sympleksów zerowymiarowych wyznacza tylko jedną klasę abstrakcji.

Definicja 3. *Klasę abstrakcji relacji równoważności uporządkowań wierzchołków sympleksu nazywamy **orientacją sympleksu**. Sympleks z ustaloną orientacją nazywamy **zorientowanym sympleksem**.*

Notacja 4. Niech $a_0, a_1, \dots, a_n$ będą punktami geometrycznie niezależnymi. Sympleks generowany przez punkty $a_0, a_1, \dots, a_n$ będziemy oznaczać przez

$$a_0, a_1, \dots, a_n,$$

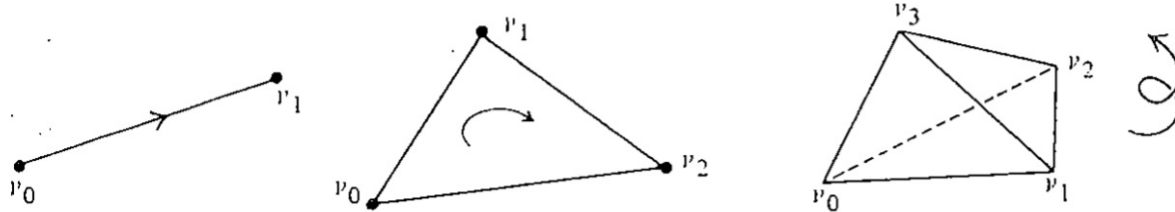
zorientowany sympleks o orientacji $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ przez

$$[a_0, a_1, \dots, a_n],$$

zaś klasę abstrakcji orientacji $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ przez

$$(a_0, a_1, \dots, a_n).$$

Przykład 5. Orientację sympleksu często będziemy oznaczać strzałkami.



Definicja 6. Niech K będzie kompleksem sympleksyjnym. **p -łańcuchem** w K nazywamy funkcję ze zbioru zorientowanych p -sympleksów K w liczby całkowite spełniającą następujące dwa warunki:

1. $c(\sigma) = -c(\sigma')$ jeżeli σ i σ' są dwiema orientacjami tego samego sympleksu,
2. $c(\sigma) = 0$ dla prawie wszystkich p -sympleksów σ .

Grupę wszystkich p -łańcuchów (z działaniem dodawania wartości) nazywamy **grupą zorientowanych p -łańcuchów** K i oznaczamy $C_p(K)$. Dla $p < 0$ lub $p > \dim K$ przyjmujemy, że $C_p(K)$ jest trywialną grupą jednoelementową.

Dla zorientowanego sympleksu σ w K definiujemy **elementarny p -łańcuch** c odpowiadający σ następująco:

1. $c(\sigma) = 1$,
2. $c(\sigma') = -1$, jeśli σ' jest inną orientacją σ ,
3. $c(\tau) = 0$, dla wszystkich różnych od σ sympleksów w K .

Uwaga 7. Nadużywając trochę notacji, będziemy często używać tego samego symbolu σ do oznaczenia sympleksu, zorientowanego sympleksu oraz elementarnego łańcucha odpowiadającego σ .

Lemat 8. $C_p(K)$ jest wolną grupą abelową. Dla każdej ustalonej orientacji wszystkich sympleksów $\sigma \in K$, rodzina odpowiadających im elementarnych p -łańcuchów tworzy bazę $C_p(K)$.

Uwaga 9. Grupa $C_0(K)$ ma naturalną bazę wyznaczoną przez jedyną orientację wszystkich 0-sympleksów w K . Grupy $C_p(K)$, dla $p > 0$, mają różne bazy wyznaczane przez różne możliwe orientacje.

Wniosek 10. Każda funkcja f odwzorowująca zorientowane p -sympleksy kompleksu K na grupę abelową G taka, że $f(-\sigma) = -f(\sigma)$ ma jednoznaczne przedłużenie do homomorfizmu grupy C_p na grupę G .

Uwaga 11. Rozważmy odwzorowanie $\delta_p: C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ zdefiniowane w następujący sposób: jeżeli $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_p]$ jest zorientowanym sympleksem, $p > 0$, to

$$\delta_p \sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p],$$

gdzie symbol $\hat{v}_i$ oznacza, że wierzchołek v_i został pominięty. Wówczas δ_p jest dobrze określonym homomorfizmem. Dla $p < 0$ grupa $C_p(K)$ jest trywialna, a więc, w szczególności, dla $p \leq 0$ δ_p jest trywialnym homomorfizmem.

Definicja 12. *Homomorfizm zdefiniowany w Uwadze 11 będziemy nazywać **operatorem brzegowym**.*

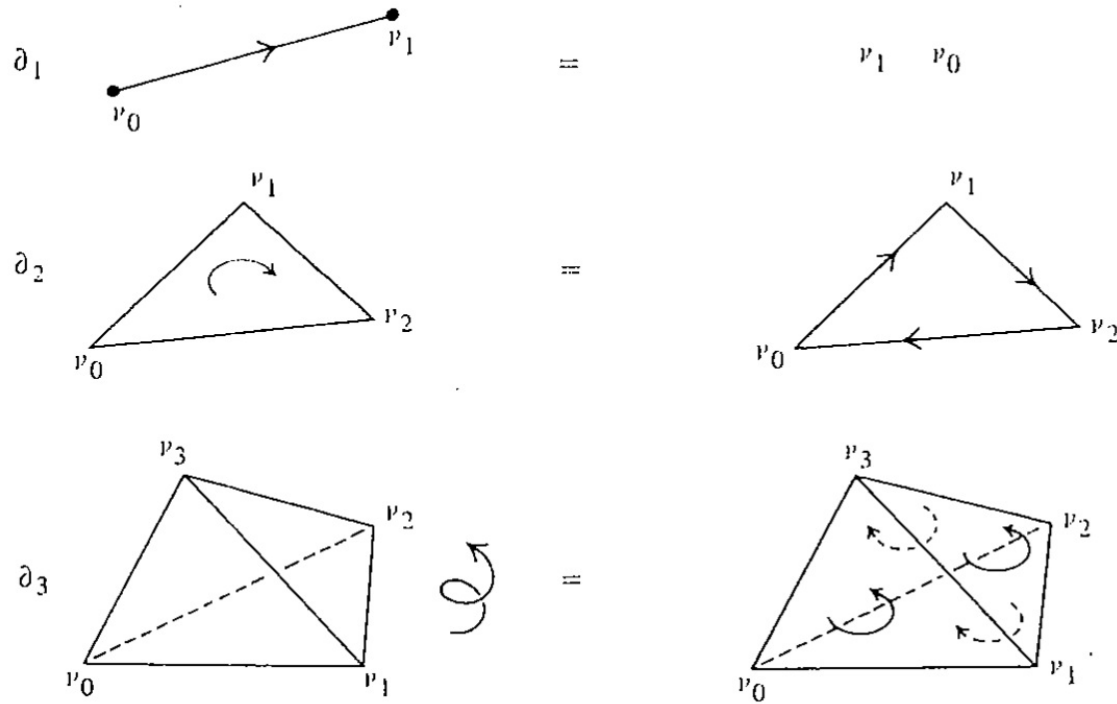
Przykład 13. Obliczmy przykładowe wartości operatora brzegowego:

$$\delta_1[v_0, v_1] = v_1 - v_0;$$

$$\delta_2[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1];$$

$$\delta_3[v_0, v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2, v_3] - [v_0, v_2, v_3] + [v_0, v_1, v_3] - [v_0, v_1, v_2].$$

Geometryczną interpretację powyższych obliczeń można zilustrować w następujący sposób:



Dalej, sprawdzamy, że

$$\delta_1 \delta_2 [v_0, v_1, v_2] = 0$$

Geometrycznie możemy zinterpretować ten fakt następująco: każdy wierzchołek 2-sympleksu $[v_0, v_1, v_2]$ po zastosowaniu δ_2 pojawi się zarówno jako początek pewnego 1-sympleksu, jak i koniec innego 1-sympleksu. Po wyekstrahowaniu tej informacji operatorem δ_1 , otrzymamy pary przeciwnie zorientowanych wierzchołków, które w wolnej grupie abelowej dodadzą się do zera.

Podobnie sprawdzamy, że

$$\delta_2\delta_3[v_0, v_1, v_2, v_3] = 0.$$

Lemat 14. $\delta_{p-1} \circ \delta_p = 0$.

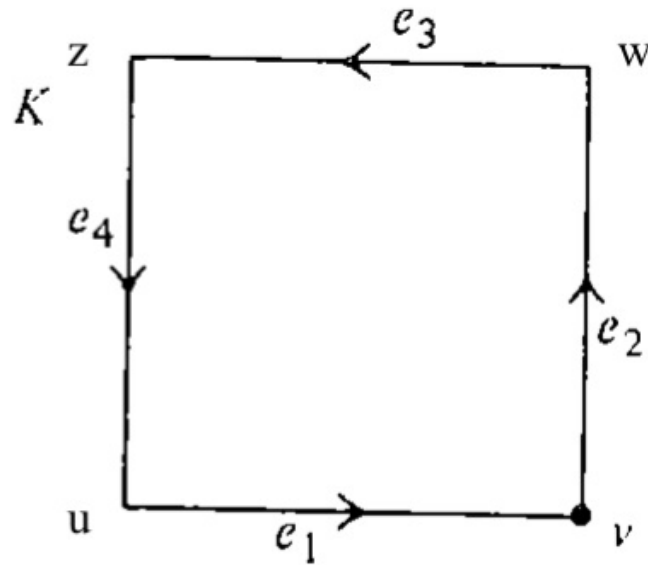
Wniosek 15. $\text{Im } \delta_{p+1} \subset \text{Ker } \delta_p \subset C_p(K)$.

Definicja 16. Grupę $\text{Ker } \delta_p$ nazywamy grupą **p -cykli** i oznaczamy $Z_p(K)$.

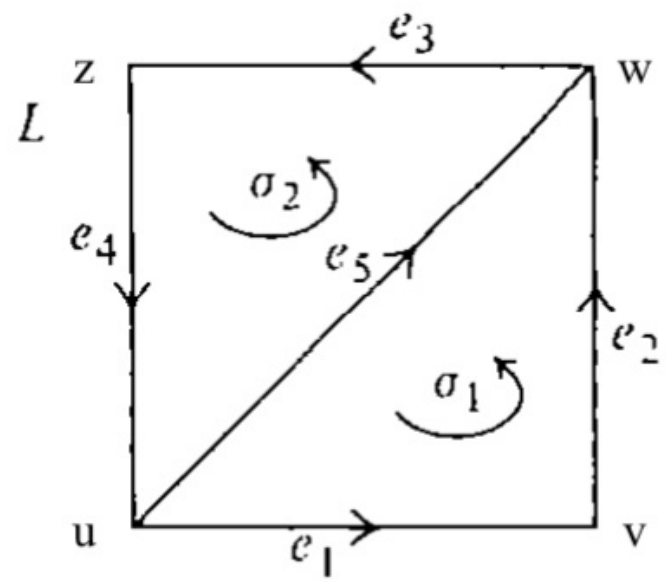
Grupę $\text{Im } \delta_{p+1}$ nazywamy grupą **p -brzegów** i oznaczamy $B_p(K)$.

Grupę $\text{Ker } \delta_p / \text{Im } \delta_{p+1}$ nazywamy **p -tą grupą homologii K** i oznaczamy $H_p(K)$.

Przykład 17. Rozważmy kompleks, którego podległą przestrzenią jest brzeg kwadratu o bokach e_1, e_2, e_3, e_4 :



Przykład 18. Rozważmy kompleks, którego podległą przestrzenią jest kwadrat o bokach e_1, e_2, e_3, e_4 . Dla opisanie wszystkich sympleksów dorysujmy jeszcze przekątną e_5 :



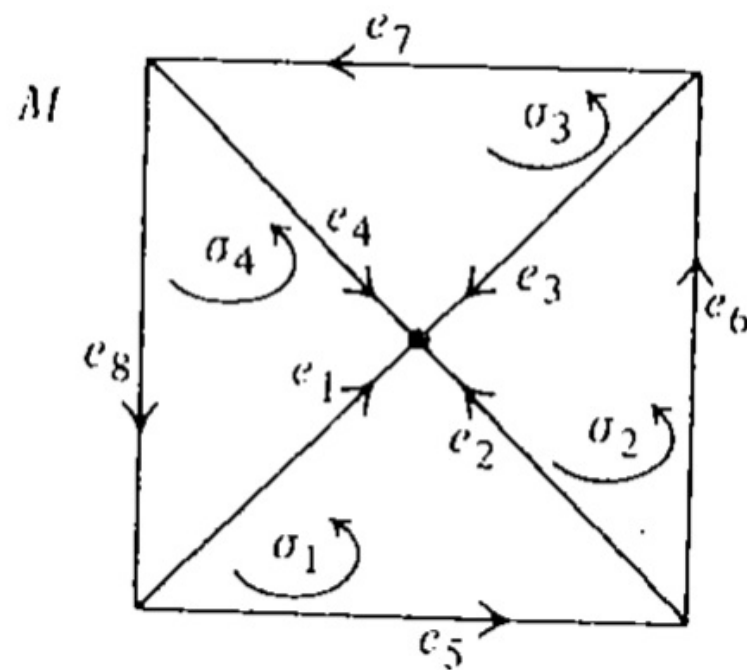
Definicja 19. Niech K będzie kompleksem, a L jego podkompleksem.

Mówimy, że łańcuch c jest **przenoszony** przez podkompleks L , jeżeli jego wartość jest równa 0 na każdym sympleksie, który nie należy do L .

Mówimy, że p -łańcuchy c i c' są **homologiczne**, jeżeli $c - c' = \delta_{p+1}d$, dla pewnego $(p+1)$ -łańcucha d .

Mówimy, że p -łańcuch c jest **homologiczny do zera** (albo **graniczący**), jeżeli $c = \delta_{p+1}d$, dla pewnego $(p+1)$ -łańcucha d .

Przykład 20. Rozważmy kompleks, którego podległą przestrzeń ilustruje poniższy obrazek:



Powyższe dwa przykłady sugerują, że grupy homologii zależą wyłącznie od podległej przestrzeni; istotnie, jest to jedna z rzeczy, jakie udowodnimy w dalszym toku wykładu.