

Definicja 1. ***n -sympleksem** generowanym przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^N$ nazywamy zbiór*

$$\sigma = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid x = \sum_{i=0}^n t_i a_i, t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_0 \geq 0, t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0 \right\}.$$

Uwaga 2. Niech σ będzie n -sympleksem generowanym przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Dla punktu $x \in \sigma$ jednoznacznie wyznaczone skalary $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ takie, że

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a_i,$$

$\sum_{i=0}^n t_i = 1$ oraz $t_0 \geq 0, t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0$ nazywamy **współzrędnymi barycentrycznymi** punktu x względem $a_0, a_1, \dots, a_n$ i oznaczamy przez $t_0(x), t_1(x), \dots, t_n(x)$.

Definicja 3. Niech σ będzie n -sympleksem generowanym przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Punkty $a_0, a_1, \dots, a_n$ nazywamy **wierzchołkami** sympleksu σ , a liczbę n jego **wymiarem**. Każdy sympleks generowany przez pewien podzbiór zbioru $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ nazywamy **ścianą** sympleksu σ . W szczególności ścianę sympleksu σ generowaną przez zbiór $\{a_1, \dots, a_n\}$ nazywamy ścianą leżącą **naprzeciw** wierzchołka a_0 . Ściany sympleksu σ różne od σ nazywamy **ścianami właściwymi**, a ich sumę mnogościową **brzegiem** sympleksu σ , oznaczanym przez $\text{Bd } \sigma$. **Wnętrze** sympleksu σ definiujemy jako $\sigma \setminus \text{Bd } \sigma$ i oznaczamy przez $\text{Int } \sigma$.

Uwaga 4. Niech σ będzie n -sympleksem generowanym przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Wówczas:

1. $\text{Bd } \sigma = \{x \in \sigma \mid \exists i_0 \in \{0, 1, \dots, n\} t_{i_0}(x) = 0\};$
2. $\text{Int } \sigma = \{x \in \sigma \mid \forall i \in \{0, 1, \dots, n\} t_i(x) > 0\};$
3. dla każdego punktu $x \in \sigma$ istnieje dokładnie jedna ściana s sympleksu σ taka, że $x \in \text{Int } s$.

Definicja 5. Niech $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. **Normą** z x nazywamy liczbę

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}.$$

Kulę N -jednostkową B^N definiujemy jako zbiór

$$B^N = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x\| \leq 1\},$$

zaś **sferę N -jednostkową S^{N-1}** jako zbiór

$$S^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x\| = 1\}.$$

Dalej, **górną N -półsferę E_+^{N-1}** definiujemy jako zbiór

$$E_+^{N-1} = \{x \in S^{N-1} \mid x_N \geq 0\},$$

a **dolną N -półsferę E_-^{N-1}** jako

$$E_-^{N-1} = \{x \in S^{N-1} \mid x_N \leq 0\}.$$

Definicja 6. ***Promieniem** wychodzącym z punktu $w \in \mathbb{R}^N$ w kierunku punktu $p \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ nazywamy zbiór*

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x = w + tp, t \geq 0\}.$$

Lemat 7. Niech $U \subset \mathbb{R}^N$ będzie zbiorem ograniczonym, wypukłym i otwartym, niech $w \in U$.
Wówczas:

1. każdy promień wychodzący z w przecina $\text{Bd } U = \overline{U} \setminus U$ w dokładnie jednym punkcie;
2. istnieje homeomorfizm pomiędzy $\overline{U}$ oraz B^N , który odwzorowuje $\text{Bd } U$ na S^{N-1} .

Wniosek 8. Niech σ będzie n -sympleksem generowanym przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Wówczas istnieje homeomorfizm pomiędzy σ oraz B^n , który odwzorowuje $\text{Bd } \sigma$ na S^{n-1} .

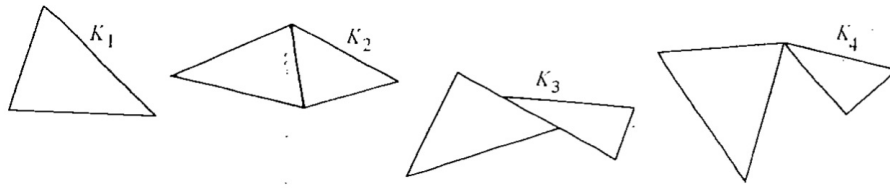
Definicja 9. Funkcję $T: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ nazywamy **odwzorowaniem afinicznym**, jeżeli jest złożeniem translacji (tj. funkcji postaci $T(x) = p + x$, gdzie p jest pewnym ustalonym punktem) i nieosobliwych odwzorowań liniowych (tj. odwzorowań liniowych o zerowym jądrze).

Uwaga 10. Niech $T: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ będzie odwzorowaniem afinicznym, niech P będzie płaszczyzną generowaną przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Wówczas $\{T(a_0), T(a_1), \dots, T(a_n)\}$ jest zbiorem geometrycznie niezależnym, zaś $T(P)$ jest płaszczyzną generowaną przez zbiór $\{T(a_0), T(a_1), \dots, T(a_n)\}$.

Definicja 11. *Kompleksem sympleksyjnym* w $\mathbb{R}^N$ nazywamy rodzinę sympleksów K w $\mathbb{R}^N$ taką, że

1. *każda ściana każdego sympleksu w K należy do K ;*
2. *przecięcie dwóch sympleksów z K jest ścianą każdego z nich.*

Przykład 12. Rodzina K_1 złożona z 2-sympleksu wraz z jego ścianami jest kompleksem. Rodzina K_2 złożona z dwóch 2-sympleksów o wspólnej ścianie i ich ściany jest kompleksem. Rodzina K_3 nie jest kompleksem, a K_4 jest:



Lemat 13. Rodzina sympleksów K jest kompleksem wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:

1. każda ściana każdego sympleksu w K należy w K ;
2. każda para różnych sympleksów w K ma rozłączne wnętrza.

Wniosek 14. *Jeżeli σ jest sympleksem, to rodzina złożona z σ i wszystkich jego właściwych ścian jest kompleksem.*

Definicja 15. Niech K będzie kompleksem sympleksyjnym. Podrodzina L rodziny sympleksów K zawierająca w szczególności wszystkie ściany wszystkich swoich elementów jest kompleksem sympleksyjnym, który nazywać będziemy **podkompleksem**. Podrodzina złożona z wszystkich sympleksów wymiaru co najwyżej równego p jest podkompleksem, który będziemy nazywać **p -szkieletem** kompleksu K i oznaczać przez $K^{(p)}$. W szczególności 0-szkielet $K^{(0)}$ jest zbiorem wierzchołków sympleksów w K .

Definicja 16. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, niech $\mathcal{C} = \{C_i \mid i \in I\}$ będzie rodziną podzbiorów X , niech $Y \subset X$. Na każdym zbiorze C_i , $i \in I$, określamy topologię podprzestrzeni (tj. zbiór $V \subset C_i$ jest otwarty w C_i , jeżeli $V = C_i \cap U$, dla pewnego zbioru U otwartego w X). Na zbiorze Y określamy **topologię koherentną** względem $\mathcal{C}$ w następujący sposób: zbiór $A \subset Y$ jest otwarty w topologii koherentnej, jeżeli dla każdego C_i , $i \in I$, zbiór $A \cap C_i$ jest otwarty w C_i .

Definicja 17. Niech K będzie pewną rodziną sympleksów. Oznaczmy przez $|K|$ podzbiór $\mathbb{R}^N$ równy sumie mnogościowej sympleksów z K . Na zbiorze $|K|$ określamy topologię koherentną względem rodziny K , którą w tym kontekście będziemy nazywać **przestrzenią podległą K** lub **wielokomórką K** . Jeżeli K jest kompleksem, wielokomórkę K będziemy nazywać **wielościanem K** .

Uwaga 18. Topologia przestrzeni podległej jest większa od topologii dziedziczonej z $\mathbb{R}^N$ (tzn. każdy podzbiór $|K|$ otwarty w topologii $\mathbb{R}^N$ jest też otwarty w topologii $|K|$).

Przykład 19. Topologia przestrzeni podległej może być różna od topologii dziedziczonej. Rozważmy rodzinę sympleksów K złożoną z 1-sympleksów w $\mathbb{R}$ postaci $[m, m+1]$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, i postaci $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ wraz z wszystkimi ich ścianami. Wówczas zbiór $|K|$ jest równy $\mathbb{R}_+$ (zbiór dodatnich liczb rzeczywistych), ale topologie $|K|$ i $\mathbb{R}$ są różne: na przykład, zbiór $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ jest domknięty w $|K|$ (dla każdego sympleksu $\sigma \in K$ przecięcie $A \cap \sigma$ jest albo zbiorem pustym, albo singletonem $\{\frac{1}{n}\}$, a więc zbiorem domkniętym w σ jako zbiór domknięty w $\mathbb{R}$), ale nie jest domknięty w $\mathbb{R}$ (granica ciągu $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ elementów zbioru A równa 0 nie jest elementem zbioru A).

Uwaga 20. Niech K będzie skończonym sympleksem symplecjajalnym. Wówczas topologia przestrzeni podległej K jest równa topologii dziedziczonej z $\mathbb{R}^N$.

Lemat 21. *Jeżeli L jest podkompleksem K , to $|L|$ jest domkniętą podprzestrzenią $|K|$. W szczególności, jeśli $\sigma \in K$, to σ jest domkniętą podprzestrzenią $|K|$.*

Lemat 22. *Odwzorowanie $f: |K| \rightarrow X$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy $f \restriction_\sigma$ jest ciągłe dla wszystkich $\sigma \in K$.*

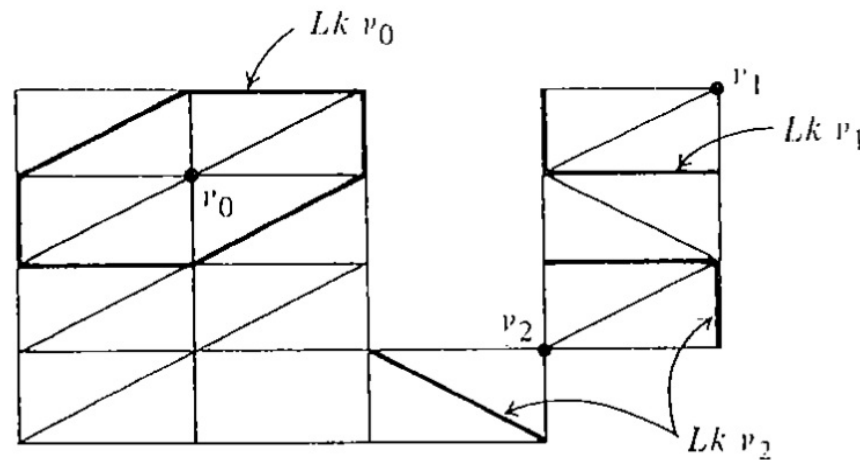
Definicja 23. Niech x będzie punktem wielościanu $|K|$. Załóżmy, że jednoznacznie wyznaczony sympleks $\sigma \in K$ taki, że $x \in \text{Int } \sigma$ ma wierzchołki $a_0, a_1, \dots, a_n$. Niech $t_0, t_1, \dots, t_n$ oznaczają współrzędne barycentryczne x względem σ . Jeżeli v jest dowolnym wierzchołkiem K , to definiujemy **współrzędne barycentryczne** $t_v(x)$ punktu x względem v jako $t_v(x) = 0$, jeśli v nie jest jednym z wierzchołków $a_0, a_1, \dots, a_n$, oraz jako $t_v(x) = t_i$, jeśli $v = a_i$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Uwaga 24. Współrzędne barycentryczne są funkcjami ciągłymi na $|K|$.

Lemat 25. $|K|$ jest przestrzenią Hausdorffa.

Lemat 26. *Jeżeli K jest skończony, to $|K|$ jest zwarty. Jeżeli zbiór $A \subset |K|$ jest zwarty, to istnieje skończony podkompleks $K_0 \subset K$ taki, że $A \subset |K_0|$.*

Definicja 27. Niech K będzie kompleksem symplecjajalnym, a v jego wierzchołkiem. **Gwiazdą** wierzchołka v nazywamy sumę mnogościową wewnątrz wszystkich sympleksów K , dla których v jest jednym z wierzchołków i oznaczamy $\text{St } v$. **Domkniętą gwiazdą** v nazywamy domknięcie gwiazdy $\text{St } v$, które oznaczamy przez $\overline{\text{St } v}$ (w szczególności domknięta gwiazda jest sumą mnogościową wszystkich sympleksów, dla których v jest jednym z wierzchołków i jako taka jest wielościanem pewnego podkompleksu kompleksu K). **Łączem** wierzchołka v nazywamy zbiór $\overline{\text{St } v} \setminus \text{St } v$, który oznaczamy przez $\text{Lk } v$



Uwaga 28. Niech K będzie kompleksem symplecjajalnym, a v jego wierzchołkiem.

1. $\text{St } v$ jest otwarty w $|K|$.
2. $\overline{\text{St } v}$, $|K| \setminus \text{St } v$, $\text{Lk } v$ są wielościanami podkompleksu kompleksu K .
3. $\text{St } v$ i $\overline{\text{St } v}$ są łukowo spójne.

Definicja 29. *Kompleks sympleksyjny K jest **lokalnie skończony**, jeżeli każdy wierzchołek K należy do skończonej liczby sympleksów z K .*

Uwaga 30. Kompleks jest lokalnie skończony wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego jego wierzchołka v domknięta gwiazda $\overline{St\,v}$ jest wielościanem skończonego podkompleksu kompleksu K .

Lemat 31. *Kompleks K jest lokalnie skończony wtedy i tylko wtedy, gdy $|K|$ jest lokalnie zwarta (tzn. każdy punkt ma zwarte otoczenie).*

Lemat 32. Niech K i L będą kompleksami symplecjajnymi i niech $f: K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ będzie odwzorowaniem o tej własności, że jeśli wierzchołki $v_0, v_1, \dots, v_n$ generują sympleks w K , to wówczas wierzchołki $f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_n)$ generują sympleks w L . Wówczas f można przedłużyć do odwzorowania ciągłego $F: |K| \rightarrow |L|$ takiego, że jeśli

$$x = \sum_{i=0}^n t_i v_i,$$

to wówczas

$$F(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i).$$

Definicja 33. *Odwzorowanie o własnościach takich, jak odwzorowanie F z Lematu 32 nazywamy odwzorowaniem symplecjialnym.*

Uwaga 34. Złożenie odwzorowań symplecticznych jest odwzorowaniem symplecticznym.

Lemat 35. Niech K i L będą kompleksami symplecjnymi i niech $f: K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ będzie bijekcją o tej własności, że jeśli wierzchołki $v_0, v_1, \dots, v_n$ generują sympleks w K , to wówczas wierzchołki $f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_n)$ generują sympleks w L . Wówczas indukowane odwzorowanie symplecjne $F: |K| \rightarrow |L|$ jest homeomorfizmem.

Definicja 36. *Odwzorowanie o własnościach takich, jak odwzorowanie F z Lematu 35 nazywamy **izomorfizmem symplecticalnym** lub **homeomorfizmem symplecticalnym**.*

Wniosek 37. Niech Δ^N oznacza kompleks symplecjalny złożony z N -sympleksu i jego ścian. Jeżeli K jest skończonym kompleksem, to K jest izomorficzny z pewnym skończonym podkompleksem kompleksu Δ^N , dla pewnego $N \in \mathbb{N}$.