

Paweł Gładki

Wybrane metody algebraiczne

<http://www.math.us.edu.pl/~pgladki/>

Konsultacje:

Środa, 14:00-15:00, p. 527, Bankowa 14

Jeżeli chcesz spotkać się z prowadzącym podczas konsultacji, postaraj się powiadomić go o tym przed lub po zajęciach, zadzwoń do jego pokoju, lub wyślij mu emaila.

Zasady zaliczania przedmiotu:

- ▶ kolokwium warte 50 punktów,
- ▶ zadania domowe warte 30 punktów,
- ▶ aktywność na zajęciach warta 20 punktów.

Warunkiem zaliczenia przedmiotu jest zdobycie co najmniej 60 punktów.

Kolokwium będzie trwało 90 minut, odbędzie się na ostatnich ćwiczeniach w semestrze.

Topologia algebraiczna na naszym podwórku

Pamiętam, że w czasie jednego z posiedzeń PTM poświęconych wrażeniom z Kongresu w Amsterdamie była mowa o medalistach Fieldsa (Serre, Kodaira) i że tematykę wyników tych medalistów określono jako niezrozumiałą. Może było w tym trochę zażenowania, ale i trochę lekceważenia dla tej nowej rodzącej się matematyki i jakby postanowienia, że wytrwamy na starych podstawach i w starej wierze. Trzeba tu zwrócić uwagę, że zachodząca przebudowa matematyki na świecie w myśl bourbakistowskich idei dotyczyła przede wszystkim algebry, topologii algebraicznej, geometrii algebraicznej, geometrii różniczkowej i zespolonej, a zatem działów w zasadzie w Polsce w tych czasach nie uprawianych. Badania i osiągnięcia matematyków w Polsce koncentrowały się w klasycznej analizie funkcjonalnej, topologii ogólnej i metrycznej, podstawach matematyki, równaniach różniczkowych i analizie zespolonej. Wydawać się zatem mogło, że uda się przetrwać bez współuczestniczenia w tworzeniu, czy nawet znajomości tego „nowego”. Ponieważ jednak zapewne spadek uznania dla matematyki polskiej dawał się odczuwać, zatem starano się zachować twarz przez pewne lekceważenie matematyki bourbakistowskiej, umniejszanie roli ogólnych metod badawczych, przeciwstawiając im uroki tak zwanych metod elementarnych, to znaczy opartych na jednostkowych rozumowaniach i używających jedynie języka teorii mnogości.

Andrzej Białynicki-Birula, *Bourbaki a sprawa polska*, Wiadomości Matematyczne 40 (2004), 169–174.

Topologia algebraiczna w zastosowaniach, czyli Blue Brain Project

Projekt stworzenia wirtualnego mózgu poprzez symulację komputerową działania każdego neuronu.

Głównym celem Blue Brain Project jest zrozumienie działania mózgu ssaków za pomocą inżynierii wstecznej.

Cele pośrednie, które mają do tego doprowadzić, to:

1. Stworzenie Ośrodka Symulacji Mózgu, w którym możliwe będzie tworzenie symulacji mózgów różnych gatunków, w różnych skalach dokładności i z różnymi zaburzeniami.
2. Udowodnienie skuteczności i dokładności symulacji poprzez stworzenie i przetestowanie szczegółowego modelu kolumny neuronalnej wewnątrz zakrętu zaśrodkowego młodego szczura.
3. Użycie symulacji do odkrycia podstawowych zasad budowy i funkcjonowania mózgu.
4. Wykorzystanie tych zasad do stworzenia większych i dokładniejszych modeli mózgu i opracowanie strategii modelowania całego mózgu człowieka.

Michael W. Reimann, Max Nolte, Martina Scolamiero, Katharine Turner, Rodrigo Perin, Giuseppe Chindemi, Paweł Dłotko, Ran Levi, Kathryn Hess, Henry Markram, *Cliques of Neurons Bound into Cavities Provide a Missing Link between Structure and Function*, *Frontiers in Computational Neuroscience*, 2017; 11 DOI: 10.3389/fncom.2017.00048

The lack of a formal link between neural network structure and its emergent function has hampered our understanding of how the brain processes information. We have now come closer to describing such a link by taking the direction of synaptic transmission into account, constructing graphs of a network that reflect the direction of information flow, and analyzing these directed graphs using algebraic topology. Applying this approach to a local network of neurons in the neocortex revealed a remarkably intricate and previously unseen topology of synaptic connectivity. The synaptic network contains an abundance of cliques of neurons bound into cavities that guide the emergence of correlated activity. In response to stimuli, correlated activity binds synaptically connected neurons into functional cliques and cavities that evolve in a stereotypical sequence toward peak complexity. We propose that the brain processes stimuli by forming increasingly complex functional cliques and cavities.

Plan wykładu:

1. Sympleksy.
2. Kompleksy symplecjalne i odwzorowania symplecjalne.
Abstrakcyjne kompleksy symplecjalne.
3. Grupy homologii. Grupy homologii powierzchni.
4. Homologia zero-wymiarowa. Homologia stożka. Relatywna homologia.
5. Homomorfizmy indukowane przez odwzorowania symplecjalne.
6. Kompleksy łańcuchowe i nośniki acykliczne.
7. Homologia o dowolnych współczynnikach. Obliczalność grup homologii.

Literatura:

1. James R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley, 1984
2. James R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2003.
3. Michael W. Reimann, Max Nolte, Martina Scolamiero, Katharine Turner, Rodrigo Perin, Giuseppe Chindemi, Paweł Dłotko, Ran Levi, Kathryn Hess, Henry Markram, *Cliques of Neurons Bound into Cavities Provide a Missing Link between Structure and Function*, *Frontiers in Computational Neuroscience*, 2017; 11 DOI: 10.3389/fncom.2017.00048

Sympleksy.

Definicja 1. Zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^N$ nazywamy **geometrycznie niezależnym**, jeżeli dla dowolnego ciągu skalarów $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$, jeśli

$$\sum_{i=0}^n t_i = 0$$

oraz

$$\sum_{i=0}^n t_i a_i = 0$$

to wówczas $t_0 = t_1 = \dots = t_n = 0$.

Punkty dodajemy i mnożymy przez skalary „po współrzędnych” tak, jakby to były wektory w $\mathbb{R}^N$: ściśle rzecz biorąc pracujemy w przestrzeni afinicznej, gdzie razem z wektorami występują też punkty.

Uwaga 2. Zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^N$ jest geometrycznie niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór wektorów $\{a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$ jest liniowo niezależny.

Przykład 3. Wobec Uwagi 2 natychmiast widzimy, że każde 2 rozłączne punkty są geometrycznie niezależne, podobnie jak każde 3 niewspółliniowe punkty, albo każde 4 niewspółpłaszczyznowe.

Definicja 4. *Płaszczyznę generowaną przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^N$ nazywamy zbiór*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x = \sum_{i=0}^n t_i a_i, t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^n t_i = 1\}.$$

Uwaga 5. Niech P będzie płaszczyzną generowaną przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Wówczas dla każdego punktu $x \in P$ istnieje dokładnie jeden ciąg skalarów $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ taki, że

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a_i \text{ oraz } \sum_{i=0}^n t_i = 1.$$

Uwaga 6. Niech P będzie płaszczyzną generowaną przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Wówczas $a_0, a_1, \dots, a_n \in P$.

Uwaga 7. Niech P będzie płaszczyzną generowaną przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Wówczas

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid x = a_0 + \sum_{i=1}^n t_i(a_i - a_0), t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Innymi słowy, P jest płaszczyzną przechodzącą przez punkt a_0 i równoległą do wektorów $a_i - a_0$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Uwaga 8. Niech P będzie płaszczyzną generowaną przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Wówczas jeżeli $w \notin P$, to zbiór $\{w, a_0, a_1, \dots, a_n\}$ jest geometrycznie niezależny.

Definicja 9. ***n -sympleksem** generowanym przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^N$ nazywamy zbiór*

$$\sigma = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid x = \sum_{i=0}^n t_i a_i, t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_0 \geq 0, t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0 \right\}.$$

Uwaga 10. Niech σ będzie n -sympleksem generowanym przez geometrycznie niezależny zbiór punktów $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Dla punktu $x \in \sigma$ jednoznacznie wyznaczone skalary $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ takie, że

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a_i,$$

$\sum_{i=0}^n t_i = 1$ oraz $t_0 \geq 0, t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0$ nazywamy **współrzędnymi barycentrycznymi** punktu x względem $a_0, a_1, \dots, a_n$ i oznaczamy przez $t_0(x), t_1(x), \dots, t_n(x)$.