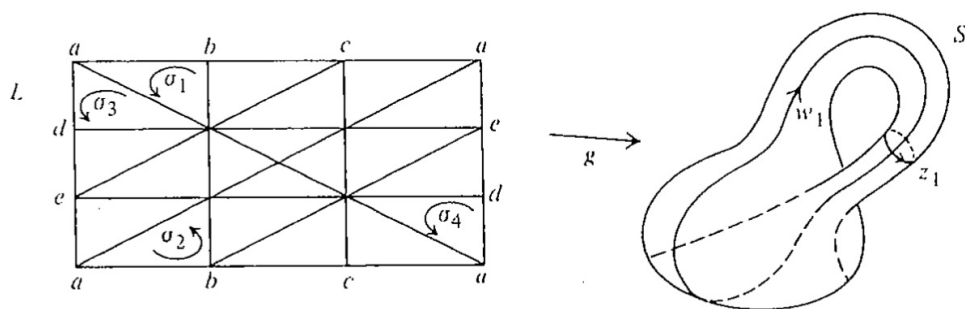


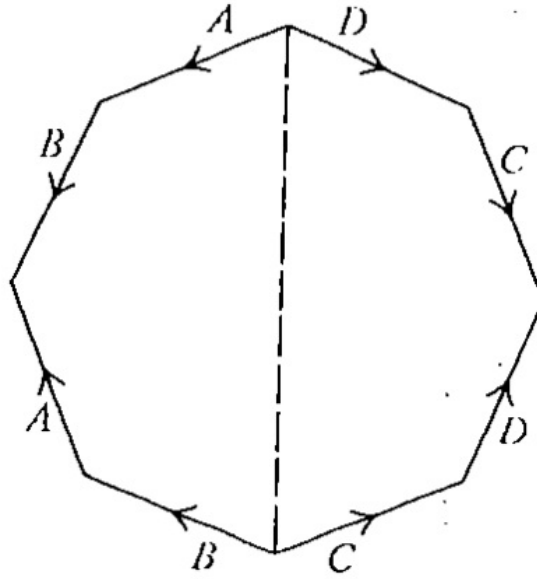
6 Dodatkowe zadania na egzamin.

1. Abstrakcyjny kompleks symplecjalny ma wierzchołki $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ i sympleksy $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_3, v_5\}$, $\{v_2, v_3, v_4\}$ i $\{v_4, v_5\}$ wraz ze ścianami. Wyznacz geometryczną realizację tego kompleksu w $\mathbb{R}^2$ i jego grupy homologii.
2. Wyznacz kompleks o 7 wierzchołkach, którego podległą przestrzenią jest torus.
3. Wyznacz kompleks o 8 wierzchołkach, którego podległą przestrzenią jest butelka Kleina.
4. Wyznacz grupy homologii następujących kompleksów:
 - a) K złożonego z 3 2-sympleksów (v_1, v_2, v_3) , (v_1, v_2, v_4) , (v_1, v_3, v_4) i ich ścian;
 - b) K złożonego z 4 wierzchołków $v_1, \dots, v_4$ i 5 krawędzi (v_i, v_j) dla $(i, j) = (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)$;
 - c) 1-szkieletu 2-sympleksu;
 - d) K takiego, że $|K|$ jest homeomorficzne ze wstęgą Möbiusa;
 - e) K takiego, że $|K|$ jest homeomorficzne z cylindrem $S^1 \times [0, 1]$.
5. Wyznacz grupy homologii butelki Kleina.
6. Wyznacz grupy homologii płaszczyzny rzutowej.
7. Wyznacz grupy homologii sumy spójnej dwóch płaszczyzn rzutowych.
8. Niech w_1 i z_1 będą cyklami na butelce Kleina zaznaczonymi na obrazku:

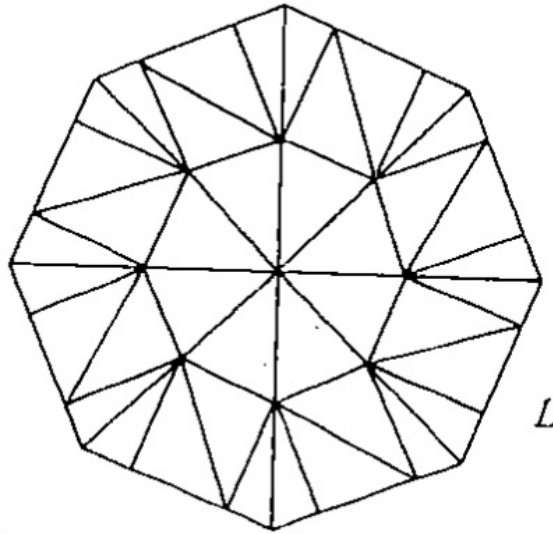


Udowodnij, że $w_1 + z_1$ jest reprezentantem warstwy generującej grupę $H_1(S)/T_1(S)$.

9. Sumę spójną $T \# T$ dwóch torusów otrzymujemy wycinając otwarty dysk z każdego z torusów T , a następnie sklejać je wzdłuż powstałych brzegów. Sumę tę można otrzymać jako przestrzeń ilorazową ośmiokąta poprzez utożsamienie brzegów tak, jak na obrazku:



- a. Zbuduj kompleks K , którego podległą przestrzenią jest $T\#T$, poprzez odpowiednie etykietowanie wierzchołków kompleksu L zilustrowanego poniżej:



- b. Oblicz homologię $T\#T$ naśladowując metodę z dowodu Twierdzenia 5.3.

Dokładniej, niech A będzie obrazem $\text{Bd } L$ poprzez odwzorowanie sklejające. Wówczas A jest homeomorficzne z sumą mnogościową 4 okręgów o 1 punkcie wspólnym. Niech wszystkie 2-sympleksy w L będą zorientowane przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara, niech γ będzie sumą odpowiadających im sympleksów w K . Pokaż, że każdy 1-sympleks w K jest homologiczny z cyklem przenoszonym przez A . Następnie pokaż, że każdy 2-łańcuch w K , którego brzeg jest przenoszony przez A jest wielokrotnością γ . Obliczenie homologii będzie teraz polegało na analizie 1-cykli przenoszonych przez A oraz na obliczeniu wartości $\delta\gamma$.

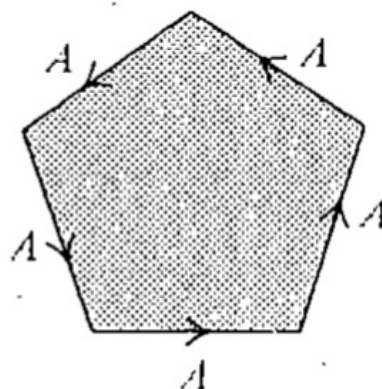
10.

1. Zdefiniuj n -krotną sumę spójną torusów $X_n = T \# T \# \dots \# T$ i oblicz jej homologię.
2. Zdefiniuj n -krotną sumę spójną płaszczyzn rzutowych $Y_n = P^2 \# P^2 \# \dots \# P^2$.

11. Oblicz homologię $T \# P^2$.

12.

1. Oblicz homologię 5-krotnych **oślich uszu**, tj. przestrzeni ilorazowej następującej przestrzeni:



2. Oblicz homologię n -krotnych oślich uszu.

13. Oblicz homologię następującej przestrzeni:

