

Wstęp do algebry liniowej i geometrii analitycznej A

Zadania

ZESTAW 1: PRZESTRZENIE WSPÓŁRZĘDNYCH

Część B

BAZA I WYMIAR PODPRZESTRZENI PRZESTRZENI WSPÓŁRZĘDNYCH

- Sprawdź czy dane wektory przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^2$ są liniowo zależne:
(a) $[0, 0]$, (b) $[1, 2]$, (c) $[3, 1]$, $[-9, 3]$, (d) $[4, 4]$, $[1, 4]$, (e) $[0, 0]$, $[2, 3]$, (f) $[7, -4]$, $[-14, 8]$,
(g) $[1, 1]$, $[1, 0]$, $[1, 1]$.
- Sprawdź czy dane wektory przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne:
(a) $[3, 4, 1]$, $[4, 1, 3]$, (b) $[2, 0, 3]$, $[10, 0, 15]$ (c) $[1, 1, 0]$, $[4, 3, 1]$, $[1, 4, 2]$, (d) $[4, 4, 2]$, $[3, 1, 0]$, $[2, 4, 1]$,
(e) $[1, 0, 1]$, $[1, 4, 0]$, $[1, 1, 0]$, $[3, 2, 1]$.
- Sprawdź czy układ $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest liniowo niezależny, gdzie:
(a) $k = 2$, $\mathbf{v}_1 = [1, 2, 3]$, $\mathbf{v}_2 = [3, 6, 7]$;
(b) $k = 2$, $\mathbf{v}_1 = [4, -2, 6]$, $\mathbf{v}_2 = [6, -3, 9]$;
(c) $k = 3$, $\mathbf{v}_1 = [2, -3, 1]$, $\mathbf{v}_2 = [3, -1, 5]$, $\mathbf{v}_3 = [1, -4, 3]$.
- Wyznacz wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których podane wektory przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są liniowo zależne, jeśli:
(a) $n = 3$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ a \end{bmatrix}$,
(b) $n = 3$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,
(c) $n = 2$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ a \end{bmatrix}$.
- Sprawdź czy dane wektory tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^2$:
(a) $[1, 0]$, $[1, 1]$, (b) $[1, 5]$, $[-3, -15]$, (c) $[3, 3]$, $[1, 8]$, (d) $[7, 3]$, $[-7, -3]$.
- Sprawdź czy dane wektory tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$:
(a) $[1, 0, -1]$, $[1, 1, 3]$, $[4, 1, 1]$, (b) $[1, 5, 0]$, $[1, 2, 3]$, $[1, 4, 1]$, (c) $[1, 3, 4]$, $[2, 7, 9]$,
(d) $[1, 1, 1]$, $[1, 2, 3]$, $[4, 7, 11]$, $[3, 4, 7]$.
- Pokaż, że wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i znajdź współrzędne wektora $\mathbf{w}$ w tej bazie, jeżeli
(a) $\mathbf{v}_1 = [1, -1]$, $\mathbf{v}_2 = [1, 1]$, $\mathbf{w} = [1, 2]$,
(b) $\mathbf{v}_1 = [2, 1]$, $\mathbf{v}_2 = [1, 3]$, $\mathbf{w} = [1, 1]$.
- Pokaż, że wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i znajdź współrzędne wektora $\mathbf{w}$ w tej bazie, jeżeli
(a) $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}$.
(b) $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}$.
- Znajdź współrzędne dowolnego wektora $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ w podanej bazie przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$:
(a) $([7, 5], [4, 3])$, (b) $([4, 3], [17, 13])$, (c) $([4, 5], [1, 3])$.
- Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ dana para wektorów tworzy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^2$:
(a) $[1, 5]$, $[8, a]$, (b) $[2, 5]$, $[4a, 7a]$?
- Dla jakiej wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ podany układ wektorów jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$:
(a) $([1, 1, 1], [1, 2, 1], [1, 0, a])$ (b) $([1, 2, 1], [a, 1, 1], [2, 3, 2])$?
- Sprawdź czy układ wektorów $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ przestrzeni $\mathbb{K}^4$ jest liniowo zależny (niezależny), jeżeli:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad \mathbb{K} = \mathbb{Z}_7, \quad \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}. \\
\text{(b)} \quad K = \mathbb{R}, \quad \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}. \\
\text{(c)} \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}, \quad \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 3 \\ -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4+i \\ 0 \\ 5+3i \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2i \\ i \\ 2 \end{bmatrix}. \\
\text{(d)} \quad \mathbb{K} = \mathbb{Z}_5, \quad \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Jeżeli to możliwe, przedstaw jeden z wektorów tego układu jako kombinację liniową pozostałych.

13. Pokaż, że wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{Q}^4$ i znajdź współrzędne wektora $\mathbf{w}$ w tej bazie, jeżeli

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

14. Wyznacz bazę i wymiar podprzestrzeni $\text{lin}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ przestrzeni $\mathbb{Q}^4$ gdy:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}; \\
\text{(b)} \quad \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 15 \\ 17 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}; \\
\text{(c)} \quad \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 26 \\ -9 \\ -12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

15. Podany układ $\mathcal{A}$ wektorów dopełnij do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wektorami jednostkowymi. Dlaczego jest to możliwe?

- (a) $n = 3, \mathcal{A} = ([1, 1, 2])$,
(b) $n = 4, \mathcal{A} = (1, 0, 1, -1], [2, 3, 1, 1])$,
(c) $n = 3, \mathcal{A} = ([1, 1, 0], [-1, 1, 0])$.

16. Dane są wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$. Pokaż, że wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ są liniowo niezależne, a układ $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Sprawdź, który spośród wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ można dołączyć do wektorów $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ tak, aby otrzymać bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

- (a) $\mathbf{w}_1 = [1, 1, 1], \mathbf{w}_2 = [3, 4, 5], \mathbf{v}_1 = [1, 1, 2], \mathbf{v}_2 = [2, 0, 1], \mathbf{v}_3 = [4, 3, 1]$;
(b) $\mathbf{w}_1 = [1, 1, 3], \mathbf{w}_2 = [1, 0, 2], \mathbf{v}_1 = [1, 1, 0], \mathbf{v}_2 = [2, 1, 5], \mathbf{v}_3 = [3, 1, 7]$.

17. Wyznacz różnymi sposobami bazę i oblicz wymiar podprzestrzeni $\text{lin}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) < (\mathbb{Z}_7)^n$, jeżeli

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \\
\text{(b)} \quad \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \text{(d)} \quad \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

18. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ dane są bazy $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$. Oznaczmy przez $\mathcal{E}$ bazę standardową $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$. Znaleźć macierze przejścia od $\mathcal{E}$ do $\mathcal{A}$, od $\mathcal{E}$ do $\mathcal{B}$, od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{E}$ oraz od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$, gdy:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad n=2, \quad \mathcal{A} &= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right); \\ \text{(b)} \quad n=3, \quad \mathcal{A} &= \left(\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -16 \\ 7 \\ -13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right); \\ \text{(c)} \quad n=4, \quad \mathcal{A} &= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

W każdym z powyższych przypadków zapisać wektor $x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$ jako kombinację liniową wektorów bazy $\mathcal{A}$.

19. Napisz wzory na zmianę współrzędnych wektorów przy przejściu od bazy $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ do bazy $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

20. Napisz wzory na zmianę współrzędnych wektorów przy przejściu od bazy $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ do bazy $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

21. Dla każdej pary spośród baz $\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ z poprzedniego zadania sprawdź, czy bazy te są zgodnie zorientowane.

22. Obliczyć współrzędne wektora $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ w bazie $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ przestrzeni K^4 jeśli charakterystyka ciała K jest różna od 2 i od 3.

23. Napisać wzory na zmianę współrzędnych wektorów przy przejściu od bazy $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ do bazy $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ przestrzeni K^4 jeśli charakterystyka ciała K jest różna od 2.