

Wstęp do algebry liniowej i geometrii A

Zadania

ZESTAW 1: PRZESTRZENIE WSPÓŁRZĘDNYCH

Część A

PRZESTRZENIE WSPÓŁRZĘDNYCH I ICH PODPRZESTRZENIE

1. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^2$ oblicz:
(a) $[1, 2] + [1, 4]$, (b) $4[1, 3]$, (c) $-[4, 3]$, (d) $[2, 0] - [3, 1]$.
2. W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$ rozwiąż równanie:
(a) $\mathbf{x} + [5, 4] = [3, 1]$, (b) $[2, 6] - \mathbf{x} = [1, 0]$, (c) $5\mathbf{x} = [5, 2]$, (d) $4\mathbf{x} = [6, 1]$.
3. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ oblicz:
(a) $[7, 1, 8] + [1, 6, 0]$, (b) $5[1, -1, 0]$, (c) $-[1, 0, 4]$, (d) $[1, 3, 0] - [1, 5, -1]$, (e) $5[9, 3, 1] - 7[5, 1, 0]$.
4. W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ rozwiąż równanie:
(a) $\mathbf{x} + [7, 2, 0] = [8, 7, 5]$, (b) $[9, 6, 3] - \mathbf{x} = [5, 1, 7]$, (c) $3\mathbf{x} = [9, -12, 0]$, (d) $4\mathbf{x} + [1, 1, 6] = [5, 13, 6]$.
5. Niech K będzie ciałem. Zbadaj, które z następujących podzbiorów przestrzeni K^4 są podprzestrzeniami wektorowymi:
(a) $U = \{[t, t+1, 0, 1] : t \in K\}$,
(b) $U = \{[t, u, t+u, t-u] : t, u \in K\}$,
(c) $U = \{[tu, u, t, 0] : t, u \in K\}$,
(d) $U = \{[x, y, z, t] : x+y-z=0\}$,
(e) $U = \{[x, y, z, t] : x+y-z=0 \text{ i } 2x+y=0\}$,
(f) $U = \{[x, y, z, t] : xy=0\}$,
(g) $U = \{t[1, 0, 1, 0] + u[0, -1, 0, 1] : t, u \in K\}$.
6. Zbadaj, które z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^4$ są podprzestrzeniami liniowymi:
(a) $U = \{[t, u, t+u, t-u] : t \leq u\}$,
(b) $U = \{[t, u, t, 0] : tu \geq 0\}$,
(c) $U = \{[x, y, z, t] : x, y, z, t \in \mathbb{Q}\}$.
7. Zbadaj, które z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{Z}_3^2$ są podprzestrzeniami liniowymi:
(a) $U = \{[0, 0], [1, 2], [2, 1]\}$,
(b) $U = \{[0, 0], [1, 1], [2, 2]\}$,
(c) $U = \{[0, 0], [1, 2], [2, 2]\}$.
8. Jakiej postaci są wektory należące do warstwy $[1, 1] + W$, gdzie $W = \{[u, u+t] : u, t \in \mathbb{R}\} < \mathbb{R}^2$.
9. Dana jest podprzestrzeń $U = \text{Sol}(X - Y = 0)$ przestrzeni $\mathbb{Z}_3^2$. Wypisz wszystkie wektory należące do warstwy $[1, 2] + U$.
10. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wyznacz kombinację liniową wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ o współczynnikach odpowiednio a_1, a_2, a_3 , gdzie:
(a) $n = 2$, $\mathbf{v}_1 = [1, 0]$, $\mathbf{v}_2 = [-2, 3]$, $\mathbf{v}_3 = [1, 2]$, $a_1 = -1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$,
(b) $n = 3$, $\mathbf{v}_1 = [1, 0, 2]$, $\mathbf{v}_2 = [2, 1, 1]$, $\mathbf{v}_3 = [1, 2, 0]$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$.
11. Sprawdź czy wektor $\mathbf{w}$ jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$, jeśli:
(a) $n = 2$, $\mathbf{v}_1 = [1, 0]$, $\mathbf{v}_2 = [2, 1]$, $\mathbf{w} = [-1, -1]$;
(b) $n = 3$, $\mathbf{v}_1 = [1, 0, 2]$, $\mathbf{v}_2 = [1, 1, 1]$, $\mathbf{v}_3 = [1, 2, 0]$, $\mathbf{w} = [1, 1, 2]$.
12. Wyznacz wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których wektor $\mathbf{w}$ jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, gdzie:
(a) $\mathbf{v}_1 = [2, 3, 5]$, $\mathbf{v}_2 = [3, 7, 8]$, $\mathbf{v}_3 = [1, -6, 1]$, $\mathbf{w} = [7, -2, a]$;
(b) $\mathbf{v}_1 = [4, 4, 3]$, $\mathbf{v}_2 = [7, 2, 1]$, $\mathbf{v}_3 = [4, 1, 6]$, $\mathbf{w} = [5, 9, a]$;
(c) $\mathbf{v}_1 = [3, 2, 5]$, $\mathbf{v}_2 = [2, 4, 7]$, $\mathbf{v}_3 = [5, 6, a]$, $\mathbf{w} = [1, 3, 5]$;
(d) $\mathbf{v}_1 = [3, 2, 6]$, $\mathbf{v}_2 = [5, 1, 3]$, $\mathbf{v}_3 = [7, 3, 9]$, $\mathbf{w} = [a, 2, 5]$.

13. Sprawdź czy w przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ prawdziwa jest przynależność:
- (a) $[4, 9, 9] \in \text{lin}([-8, -18, 18])$,
 - (b) $[2, 5, 3] \in \text{lin}([1, 3, 0], [0, 8, 1])$,
 - (c) $[3, 1, 5] \in \text{lin}([1, 4, 8], [1, 5, -5], [1, 6, 0])$.
14. Sprawdź czy w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ zachodzi równość $W_1 = W_2$, jeśli:
- (a) $W_1 = \text{lin}([3, 1])$, $W_2 = \text{lin}([21, 7], [9, 2])$,
 - (b) $W_1 = \text{lin}([1, 6], [4, 1])$, $W_2 = \text{lin}([1, 2], [5, 2])$,
 - (c) $W_1 = \text{lin}([1, 3], [9, 6])$, $W_2 = \text{lin}([5, 3], [7, 6])$.
15. Sprawdź czy dane wektory rozpinają przestrzeń $\mathbb{R}^2$:
- (a) $[1, 3]$, $[1, 4]$, (b) $[1, 2]$, $[7, 6]$, (c) $[1, 2]$, $[5, 1]$, $[9, 0]$.
16. Sprawdź czy dane wektory rozpinają przestrzeń $\mathbb{R}^3$:
- (a) $[1, 2, 2]$, $[5, 1, 3]$, $[9, 0, 4]$, (b) $[2, 3, 5]$, $[3, 4, 9]$, $[5, 8, 17]$, (c) $[1, 2, 4]$, $[3, 5, 9]$.
17. Sprawdź czy wektory $\mathbf{v}$ oraz $\mathbf{w}$ są kombinacjami liniowymi układu $\mathcal{A}$ wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^4$, jeżeli

$$\text{a) } \mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b) } \mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Czy zapis wektora $\mathbf{v}$ w postaci kombinacji liniowej układu $\mathcal{A}$ jest jednoznaczny?

18. Dla danych podzbiorów U , A przestrzeni liniowej V pokaż, że U jest podprzestrzenią przestrzeni V oraz $\text{lin}(A) \subset U$.
- (a) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{[x_1, x_2, x_3] : 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$, $A = \{[1, 0, -2], [0, 1, 1], [1, -1, -3]\}$;
 - (b) $V = \mathbb{Z}_3^4$, $U = \text{Sol}\left(\begin{cases} X_1 + X_2 - X_4 = 0 \\ X_2 - 2X_3 = 0 \end{cases}\right)$, $A = \{[1, 1, 2, 2], [0, 1, 2, 1], [2, 2, 1, 1]\}$.
19. Wskaż skończony zbiór A rozpinający podprzestrzeń U przestrzeni liniowej V , gdzie:
- (a) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \mathbb{R}^3$;
 - (b) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{[t + u, u, 2t, t - u] : t, u \in \mathbb{R}\}$;
 - (c) $V = \mathbb{Z}_3^3$, $U = \text{Sol}(X_1 + X_2 - X_3 = 0)$;
 - (d) $V = \mathbb{Q}^4$, $U = \text{Sol}\left(\begin{cases} X_1 + 2X_2 - X_3 = 0 \\ X_1 - X_2 + X_3 - X_4 = 0 \end{cases}\right)$.
20. Stosując operacje elementarne wyznacz całkowicie zredukowany układ rozpinający U , gdzie:
- (a) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \text{lin}([1, 5, 7], [2, 1, 2], [-5, 2, 1])$;
 - (b) $V = \mathbb{Z}_5^4$, $U = \text{lin}([4, 2, 3, 2], [2, 1, 2, 2], [1, 3, 0, 4], [2, 1, 4, 1])$.
21. Wykonując przekształcenia elementarne na zbiorze rozpinającym, wyznacz całkowicie zredukowany układ rozpinający podprzestrzeń U przestrzeni liniowej V , gdzie:
- (a) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \text{lin}([1, 2, -2, 2], [0, 3, -3, 0], [-2, 5, -5, -4], [-1, 0, 0, -2], [3, -1, -1, 6])$;
 - (b) $V = \mathbb{Z}_7^3$, $U = \text{lin}([1, 3, 3], [2, 5, 0], [2, 1, 4], [5, 2, 0])$;
 - (c) $V = \mathbb{Q}^3$, $U = \text{lin}([1, 1, 1], [2, -1, 3], [0, 1, -5], [3, -2, 1], [6, -2, -1])$.
22. Przedstaw wektor $\mathbf{v} \in V$ w postaci sumy wektora z podprzestrzeni U i wektora z podprzestrzeni W , jeśli:
- (a) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \text{lin}([1, 0, -1], [0, 1, 1])$, $W = \text{lin}([1, 1, 0])$, $\mathbf{v} = [0, 1, 1]$;
 - (b) $V = \mathbb{Z}_5^3$, $U = \text{lin}([2, 0, 1], [0, 1, 2])$, $W = \text{lin}([1, 1, 1], [3, 1, 2])$, $\mathbf{v} = [1, 2, 3]$;
 - (c) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \text{lin}([1, 1, 1])$, $W = \text{Sol}(X_1 + X_2 - X_3 = 0)$, $\mathbf{v} = [1, -1, 2]$;
23. Pokaż, że $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$, jeżeli

$$\text{(a) } U_1 = \text{Sol}(x_1 + x_2 + x_3 = 0), \text{ natomiast } U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

$$\text{(b) } U_1 = \text{Sol}\left(\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}\right), \text{ natomiast } U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$