Zestaw zadań 3: Homomorfizmy grup, podgrupy normalne. Grupa ilorazowa, twierdzenie o izomorfizmie.

(1) Sprawdzić, że funkcja φ jest homomorfizmem podanych grup. Wyznaczyć jądro $\ker\varphi$ i obraz $\mathrm{im}\varphi$ homomorfizmu φ:
 (a) $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad \varphi(a) = na, \quad n \in \mathbb{N}$,
 (b) $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad \varphi(z) = |z|$,
 (c) $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, \quad \varphi(x) = x^2$,
 (d) $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad \varphi(z) = z^m, \quad n \in \mathbb{N}$,
 (e) $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \log x$,
 (f) $\varphi : M(n, \mathbb{R}) \to M(n, \mathbb{R}), \quad \varphi(A) = A^T$,
 (g) $\varphi : Gl(n,\, K) \to K^*, \quad \varphi(A) = \det A$,
 (h) $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad \varphi((a, b)) = a$,
 (i) $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi((x, y)) = x - y$,
 (j) $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(z) = \mathrm{Re}(z)$,
 (k) $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(f) = f(1)$.

(2) Wykazać, że grupy
 (a) $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$,
 (b) $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}$,
 (c) $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Q}^*$,
 (d) $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^*$,
 (e) $\mathbb{C}$ i $\mathbb{C}^*$,
 (f) $\mathbb{R}^+$ i $\mathbb{R}^*$

 nie są izomorficzne.

(3) Udowodnić, że odwzorowanie $\varphi : G \to G$,
 (a) $\varphi(a) = a^2$,
 (b) $\varphi(a) = a^{-1}$,

 jest homomorfizmem grup wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grupą abelową.

(4) Wykazać, że odwzorowanie $\varphi : G_1 \times G_2 \to G_1, \varphi((a, b)) = a$ jest homomorfizmem grup G_1 i G_2. Wyznaczyć $\ker\varphi$ i $\mathrm{im}\varphi$.

(5) Udowodnić, że homomorficzny obraz grupy cyklicznej/abelowej jest grupą cykliczną/abelową.

(6) Niech $\varphi_i : G_i \to F_i,\ i = 1, 2$ będą homomorfizmami grup. Wykazać, że odwzorowanie $\phi : G_1 \times G_2 \to F_1 \times F_2, \quad \phi((a_1,\, a_2)) = (\varphi_1(a_1),\, \varphi_2(a_2))$, jest homomorfizmem grup.

(7) Udowodnić, że $G \times F \cong F \times G$ dla dowolnych grup F i G.

(8) Wyznaczyć wszystkie podgrupy normalne grupy :
 (a) $S(3)$,
 (b) $D(4)$,
 (c) $\mathbb{Z}_5$,
 (d) $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{10})$,
 (e) Quat.

(9) Wykazać, że
 (a) $\mathrm{Sl}(n,\, K) \lhd \mathrm{Gl}(n,\, K)$,
 (b) $\{I,\, -I\} \lhd \mathrm{Gl}(n,\, K)$, gdzie I oznacza macierz jednostkową.

(10) Udowodnić, że :
 (a) $(G :\, H) = 2 \Longrightarrow H \lhd G$,
 (b) $H_i \lhd G_i,\ i = 1,\, 2 \Longrightarrow H_1 \times H_2 \lhd G_1 \times G_2$,

(c) $X \neq \emptyset \wedge H \lhd G \Longrightarrow H^X \lhd G^X$.

(11) Niech $(G, \cdot, 1)$ będzie grupą. Dwa elementy $a, b \in G$ nazywamy sprzężonymi i piszemy $a \sim b$, jeżeli istnieje element $c \in G$ taki, że $a = c^{-1}bc$.

(a) Wykazać, że relacja $\sim$ jest relacją równoważnościową.

(b) Niech H będzie podgrupš G.

Wykazać, że $H \lhd G \Longleftrightarrow \forall_{a \in G} : a \in H \Longrightarrow [a]_\sim \subset H$.

(12) Niech $H \lhd G$, $F < G$. Wykazać, że $HF := \{hf : h \in H,\ f \in F\} < G$ oraz, że $H \lhd G \wedge F \lhd G \Longrightarrow HF \lhd G$.

(13) Opisać elementy grupy ilorazowej G/H oraz ułożyć tabelkę działania w tej grupie, jeżeli:

(a) $G = \mathbb{Z}, \quad H = 5\mathbb{Z}$,

(b) $G = \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{21}), \quad H = \{1, 8, 13, 20\}$,

(c) $G = Gl(2,\ \mathbb{Z}_3), \quad H = Sl(2,\ \mathbb{Z}_3)$,

(d) $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, \quad H = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

(14) Udowodnić izomorfizmy grup :

(a) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ \cong\ \mathbb{Z}$,

(b) $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^+ \ \cong\ \{1,\ -1\}$,

(c) $\mathbb{C}/\mathbb{R} \ \cong\ \mathbb{R}$,

(d) $\mathbb{R}^*/\{1,\ -1\} \ \cong\ \mathbb{R}^+$,

(e) $\mathbb{C}^*/\mathbb{C}_1 \ \cong\ \mathbb{R}^+$,

(f) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \ \cong\ \mu_\infty(\mathbb{C})$,

(g) $Gl(n,\ K)/Sl(n,\ K) \ \cong\ K^*$,

(h) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\{0\} \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$,

(i) $\mathbb{R}^3/H \ \cong\ \mathbb{R}^2$, gdzie $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = x - z = 0\}$.

(15) Niech $H_i \lhd G_i$ dla $i = 1, 2$. Wykazać, że $H_1 \times H_2 \lhd G_1 \times G_2$ oraz $G_1 \times G_2/H_1 \times H_2 \ \cong\ G_1/H_1 \times G_2/H_2$.

(16) Niech X będzie zbiorem niepustym. Wykazać, że jeśli $H \lhd G$, to $H^X \lhd G^X$ i $G^X/H^X \ \cong\ (G/H)^X$.

(17) Niech $\varphi : G \to F$ będzie epimomorfizmem grup. Wykazać, że :

(a) jeżeli $K \lhd F$, to $\varphi^{-1}(K) \lhd G$ i $G/\varphi^{-1}(K) \ \cong\ F/K$.

(b) jeżeli $\ker\varphi \subset H \lhd G$, to $\varphi(H) \lhd F$ i $G/H \ \cong\ F/\varphi(H)$.

(18) Niech $H \lhd G$. Wykazać, że jeśli H oraz G/H sš grupami cyklicznymi, to grupa G jest generowana przez dwa elementy.