Zestaw zadań 2: Warstwy grupy względem podgrupy. Twierdzenie Lagrange'a. Rząd elementu grupy, podgrupy cykliczne.

(1) Wyznaczyć wszystkie warstwy lewostronne i wszystkie warstwy prawostronne
  (a) grupy $D(3)$ względem podgrupy $H = \{I,\, S_1\}$,
  (b) grupy $D(3)$ względem podgrupy obrotów,
  (c) grupy $D(4)$ względem podgrupy obrotów,
  (d) grupy $\mathbb{Z}_{12}$ względem podgrupy $H = \{0,\, 3,\, 6,\, 9,\}$,
  (e) grupy $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{13})$ względem podgrupy $H = \{1,\, 5,\, 8,\, 12\}$,
  (f) grupy $\mathbb{Q}^*$ względem podgrupy $\mathbb{Q}^+$,
  (g) grupy $Gl(2,\, \mathbb{Z}_2)$ względem podgrupy $Sl(2,\, \mathbb{Z}_2)$.

(2) Opisać wszystkie warstwy danej grupy względem jej podgrupy :
  (a) grupy $\mathbb{R}^*$ względem $\mathbb{R}^+$,
  (b) grupy $\mathbb{C}$ względem $\mathbb{R}$,
  (c) grupy $Gl(n,\, \mathbb{R})$ względem $Sl(n,\, \mathbb{R})$.

(3) Obliczyć indeksy :
  (a) $(\mathbb{Z} \,:\, n\mathbb{Z})$,
  (b) $(\mathbb{R}^* \,:\, \mathbb{R}^+)$,
  (c) $(\mathrm{Gl}(n,\, \mathbb{R}) \,:\, \mathrm{Sl}(n,\, \mathbb{R}))$,
  (d) $(\mathbb{Q} \,:\, n\mathbb{Q})$,
  (e) $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \,:\, \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$,
  (f) $(\mathbb{Z}_{15} \,:\, \{0,\, 5,\, 10\})$,
  (g) $(\mathrm{Gl}(n,\, \mathbb{R}) \,:\, \mathrm{Sl}(n,\, \mathbb{R}))$,
  (h) wszystkich podgrup grupy $S(3)$ i $\mu_4(\mathbb{C})$.

(4) Niech H, K będą właściwymi podgrupami grupy skończonej, której rząd jest iloczynem dwóch różnych liczb pierwszych. Wykazać, że $H = K$ lub $H \cap K = \{1\}$.

(5) Niech H będzie podgrupą grupy multiplikatywnej G o indeksie 2. Wykazać, że podgrupa H zawiera :
  (a) kwadrat dowolnego elementu grupy G,
  (b) iloczyn dwóch dowolnych elementów grupy G nie należšcych do H.

(6) Wykazać, że jeżeli H_1 oraz H_2 są podgrupami grupy G oraz istnieją $a, b \in G$ takie, że $aH_1 = bH_2$, to $H_1 = H_2$.

(7) Dla każdego elementu $a \in G$, gdzie
  (a) $G = D(3)$,
  (b) $G = D(4)$,
  (c) $G = \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{10})$,
  (d) $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$,
  (e) $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

  wyznaczyć wszystkie elementy podgrupy cyklicznej $\langle a \rangle$.

(8) Niech $\zeta_n = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$. Wykazać, że grupa $\mu_n(\mathbb{C})$ jest grupą cykliczną generowaną przez ζ_n.

(9) Sprawdzić, które z grup $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$ dla $n \in \{2, \ldots, 10\}$ są cykliczne.

(10) Wykazać, że grupa $\mathbb{Q}$ nie posiada skończonego zbioru generatorów, ale każda skończenie generowana podgrupa grupy $\mathbb{Q}$ jest cykliczna. Znaleźć generator podgrupy generowanej przez liczby $\frac{1}{3}$ i $\frac{7}{11}$.

(11) Wyznaczyć rząd każdego elementu grupy:

(a) $D(3)$,
(b) $D(4)$,
(c) $\mathbb{Z}_6$,
(d) $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{12})$,
(e) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

(12) Wykazać, że jeśli $a^2 = 1$ dla każdego $a \in G$, to G jest grupą abelową.

(13) Grupa skończona jest cykliczna wtedy i tylko wtedy, gdy ma element, którego rząd jest równy rzędowi grupy; każda grupa cykliczna jest abelowa. Sprawdzić, że każda grupa rzędu ≤ 5 jest abelowa.

(14) Niech a, b będą elementami grupy G oraz $m, n \in \mathbb{N}$. Wykazać, że:
(a) $r(a) = r(a^{-1})$,
(b) $a^m = 1 \Rightarrow r(a) \mid m$,
(c) $r(a) = nm \Rightarrow r(a^n) = m$,
(d) $r(a) = n \Rightarrow \forall_{m \geq 1} : r(a^m) = \frac{n}{NWD(n,m)}$,
(e) $r(bab^{-1}) = r(a)$.

(15) Niech G będzie grupą cykliczną rzędu n oraz $k \mid n$. Wykazać, że grupa G zawiera podgrupę rzędu k.

(16) Niech a, b będą elementami grupy G oraz $r(a) = r(b) = 2$. Pokazać, że $r(ab) = 2 \Longleftrightarrow ab = ba$.