Zestaw zadań 1: Grupy i izomorfizmy grup. Podgrupy, podgrupy generowane przez zbiór.

(1) Rozstrzygnąć (uzasadniając odpowiedź), czy podane zbiory z określonymi odwzorowaniami są grupami:
   (a) $(\mathbb{N}, +)$,
   (b) $(\mathbb{Z}, +)$,
   (c) $(\mathbb{R}, +)$,
   (d) $(\mathbb{Z}, \cdot)$,
   (e) $(\mathbb{Q}, \cdot)$,
   (f) $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$,
   (g) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$,
   (h) $(\mathbb{R}^+, \cdot)$,
   (i) $(\{1, -1\}, \cdot)$,
   (j) $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$,
   (k) $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +)$,
   (l) $(\mathbb{Z}[i], +)$,

   gdzie symbole $+$, $\cdot$ oznaczają zwykłe dodawanie i mnożenie, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, R^+ oznacza zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2} \, : \, a, b \in \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \, : \, a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(2) Zbadać, czy zbiór $\mathbb{R}$ z działaniem $\circ$ jest grupą, jeśli:
   (a) $x \circ y = x + y + 1$,
   (b) $x \circ y = xy - x - y + 2$.

(3) Sprawdzić, że:
   (a) odwzorowanie $x \star y = x + y + xy$ jest działaniem w zbiorze $A = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, oraz że system $(A, \star)$ jest grupą abelową.
   (b) mnożenie $\cdot$ jest działaniem w zbiorze $\mathbb{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} \, : \, |z| = 1\}$, oraz że system $(\mathbb{C}_1, \cdot)$ jest grupą abelową.
   (c) mnożenie $\cdot$ jest działaniem w zbiorze $\mu_n(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} \, : \, z^n = 1\}$, oraz że system $(\mu_n(\mathbb{C}), \cdot)$ jest grupą abelową.

(4) Sprawdzić, że:
   (a) zbiór $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ reszt modulo n $(n > 1)$ z dodawaniem modulo n jest grupą abelową.
   Ułożyć tabelkę działania w grupie $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$,
   (b) zbiór $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n) = \{k \in \mathbb{Z}_n \, : \, NWD(k, n) = 1\}$ z działaniem mnożenia modulo n jest grupą abelową.
   Ułożyć tabelkę działania w grupie $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{10})$, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_8)$, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{15})$,
   (c) zbiór $D(n)$ (dla $n > 2$) izometrii własnych n-kąta foremnego z działaniem składania izometrii jest grupą.
   Ułożyć tabelkę działania w grupie $D(3)$, $D(4)$.

(5) Wykazać, że zbiór $M(n, K)$ wszystkich macierzy stopnia n nad ciałem K z dodawaniem macierzy jest grupą abelową.

(6) Wykazać, że każdy spośród następujących zbiorów macierzy jest grupą ze względu na mnożenie macierzy:
   (a) zbiór $\mathrm{Gl}(n, K) = \{A \in M(n, K) \, : \, \det A \neq 0\}$ macierzy odwracalnych stopnia n nad ciałem K,
   (b) zbiór $\mathrm{Sl}(n, K) = \{A \in M(n, K) \, : \, \det A = 1\}$ macierzy o wyznaczniku równym 1,

(c) zbiór $\mathrm{O}(n,K)=\{A\in M(n,K)\,:\,A\cdot A^T=I\}$ macierzy ortogonalnych stopnia n nad ciałem K.

(7) Rozważmy 8 następujących macierzy należących do $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{C})$:

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ i=\begin{pmatrix}\sqrt{-1}&0\\0&-\sqrt{-1}\end{pmatrix},\ j=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ k=\begin{pmatrix}0&\sqrt{-1}\\\sqrt{-1}&0\end{pmatrix},\ -I,\ -i,\ -j,\ -k.$$

(a) Sprawdzić, że $i^2=j^2=k^2=-I,\ ij=k=-ji,\ jk=i=-kj,\ ki=j=-ik.$

(b) Sprawdzić, że zbiór tych 8 macierzy tworzy grupę ze względu na mnożenie macierzy. Grupę tę oznaczać będziemy Quat i nazywać *grupą kwaternionów.*

(c) Sporządzić tabelkę działań w grupie Quat.

(8) Niech $X\neq\emptyset$ będzie zbiorem i niech $(G,\cdot)$ będzie grupą. Udowodnić, że:

(a) zbiór $S(X)$ wszystkich bijekcji zbioru X na siebie jest grupą ze względu na składanie funkcji; obliczyć rząd tej grupy gdy X jest zbiorem n-elementowym,

(b) zbiór $\mathcal{P}(X)$ wszystkich podzbiorów X tworzy grupę ze względu na różnicę symetryczną $A\div B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$,

(c) zbiór G^X wszystkich funkcji odwzorowujących X w G z działaniem $(f\bullet g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ dla każdego $x\in X$ tworzy grupę, oraz, że jeśli G jest grupą abelową, to G^X jest grupą abelową.

(9) Niech $(G_1,\circ),(G_2,\bullet)$ będą grupami. Udowodnić, że zbiór $G_1\times G_2$ z działaniem $(a,b)\star(c,d)=(a\circ c,b\bullet d)$ tworzy grupę, oraz, że jeżeli G_1 i G_2 są grupami abelowymi, to $G_1\times G_2$ jest grupą abelową.

(10) Wykazać, że w grupie multiplikatywnej $(G,\,\cdot\,1)$ dla każdych $a,b,g\in G$ oraz $m,n\in\mathbb{Z}$ zachodzą własności:

(a) $(a^{-1})^{-1}=a$,

(b) $(a\cdot b)^{-1}=b^{-1}\cdot a^{-1}$,

(c) $(a^n)^m=a^{nm}$,

(d) $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$,

(e) $(a^n)^{-1}=a^{-n}$,

(f) $ga=gb\ \Rightarrow\ a=b$,

(g) $ag=bg\ \Rightarrow\ a=b$,

(h) $a^2=1\ \Leftrightarrow\ a=a^{-1}$,

(i) $(g\cdot ag^{-1})^n=g\cdot a^n\cdot g^{-1}$,

(j) $a^2=a\ \Leftrightarrow\ a=1$.

Sformułować powyższe własności w notacji grupy addytywnej $(G,\,+,\,0)$.

(11) Sprawdzić, że grupy $(\mathbb{C}_1,\cdot)$, $(\mu_n(\mathbb{C}),\cdot)$, $(\mu_\infty(\mathbb{C}),\cdot)$, gdzie $\mu_\infty(\mathbb{C})=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n(\mathbb{C})$ są podgrupami grupy $(\mathbb{C}^*,\cdot,1)$.

(12) Wyznaczyć wszystkie podgrupy grupy :

(a) $\mathbb{Z}_4$,

(b) $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$,

(c) $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_5)$,

(d) $D(3)$,

(e) Quat.

(13) Sprawdzić, że następujące podzbiory są podgrupami grupy $(\mathbb{C},+,0)$:

(a) $\mathbb{Z}$,

(b) $\mathbb{R}$,

(c) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$,

(d) $\mathbb{Z}[D] = \{a + b\sqrt{D} :\ a, b \in \mathbb{Z}\}$, gdzie D jest ustaloną liczbą całkowitą bezkwadratową.

(14) Sprawdzić, że podzbiory

(a) $Sl(n,\, K)$;

(b) $D(n,\, K) = \{A \in Gl(n,\, K) : A = [a_{ij}],\, a_{ij} = 0$ dla $i \neq j\}$;

(c) $T(n,\, K) = \{A \in Gl(n,\, K) : A = [a_{ij}],\, a_{ij} = 0$ dla $i > j\}$

są podgrupami grupy $Gl(n,\, K)$.

(15) Niech G_1, G_2 będą grupami. Wykazać, że jeśli $H_1 < G_1$ oraz $H_2 < G_2$, to $H_1 \times H_2 < G_1 \times G_2$.

(16) Niech G będzie grupą oraz X zbiorem niepustym. Wykazać, że jeśli $H < G$, to $H^X < G^X$.

(17) Niech H, F będą podgrupami grupy G. Wykazać, że $H \cup F < G \iff H \subseteq F \vee F \subseteq H$.

(18) Udowodnić, że grupa nie daje się przedstawić w postaci sumy mnogościowej dwóch podgrup właściwych.

(19) Dla każdej z podanych grup wyznaczyć najmniejszy zbiór generatorów :

(a) $\mathbb{Z}_6$,

(b) $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{10})$,

(c) $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_8)$,

(d) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$,

(e) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$,

(f) $D(3)$,

(g) $D(4)$,

(h) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.