

Przykładowe zadania egzaminacyjne

- (1) Dla jakiej wartości parametru a równanie $644x - 588y = a$ ma rozwiązanie?
- (2) Wyznaczyć wszystkie całkowite rozwiązania równania
 - (a) $357x + 403y = 208$,
 - (b) $97x + 123y = 360$,
 - (c) $666x + 527y = 614$.
- (3) Do przewozu zboża są do dyspozycji worki 60-cio kilogramowe i 80-cio kilogramowe. Ile potrzeba poszczególnych worków do przewozu 440 kg zboża (zakładamy że worki muszą być pełne)?
- (4) Wyznacz pierwiastki równań:
 - a) $5x^2 + 5x + 1 = 0$, b) $2x^2 + 2x + 2 = 0$, c) $2x^3 + 3x^2 + x = 0$,
 w ciałach $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{11}$, $\mathbb{Z}_{13}$,
- (5) Rozwiązać równania:
 - (a) $z^2 + 3z + 3 + i = 0$, (b) $z^2 + (1 + 4i)z - (5 + i) = 0$,
 - (c) $z^2 + z(1 + i) + 2i = 0$, (d) $(4 - 3i)z^2 - (2 + 11i)z - (5 + i) = 0$.
- (6) Obliczyć (podając **dokładne** wartości części rzeczywistej i urojonej):
 - (a) $\frac{(1 - i)^{24}}{(\sqrt{3} - i)^{22}}$; (b) $\frac{(1 - i\sqrt{3})^{42}}{(-1 + i)^{31}}$; (c) $\frac{(-1 + i\sqrt{3})^{36}}{(1 + i)^{31}}$; (d) $\frac{(1 - i)^{28}}{(\sqrt{3} + i)^{20}}$;
 - (e) $\frac{(1 - i)^{28}}{(\sqrt{3} + i)^{20}}$; (f) $\frac{(-1 + i)^{32}}{(-\sqrt{3} + i)^{28}}$; (g) $\frac{(-1 - i)^{28}}{(1 - i\sqrt{3})^{20}}$.
- (7) Wyznaczyć wszystkie pierwiastki zespolone z -1 stopni 2, 3, 4, 6, 8, 12 podając ich dokładne wartości części rzeczywistych i urojonych.
- (8) Podzielić wielomian f z resztą przez wielomian g :
 - (a) $f(X) = 5X^3 + 2X^2 - X - 7$, $g(X) = X^2 + 3X - 1$ w $\mathbb{Z}[X]$;
 - (b) $f(X) = 5X^3 + 2X^2 - X - 7$, $g(X) = X^2 + 3X - 1$ w $\mathbb{Z}_8[X]$;
 - (c) $f(X) = 2X^4 + X^3 + X^2 - X + 3$, $g(X) = 3X^2 + X + 4$ w $\mathbb{Z}_5[X]$;
 - (d) $f(X) = X^3 - 7$, $g(X) = X - 2$ w $\mathbb{Z}[X]$.
- (9) Wielomian o współczynnikach z $\mathbb{Z}_5$ przy dzieleniu przez $X + 1$ daje resztę 2, przy dzieleniu przez $X + 2$ daje resztę 3 zaś przy dzieleniu przez $X + 3$ daje resztę 1. Jaką resztę daje ten wielomian przy dzieleniu przez $(X + 1)(X + 2)(X + 3)$?
- (10) (a) Wyznaczyć $NWD(15 + 4X + 21X^2 + 85X^3 - 73X^4 + 14X^5, 56 + 27X + 86X^2 + 337X^3 - 197X^4 + 21X^5)$ w pierścieniu wielomianów $\mathbb{R}[X]$.
 (b) Wyznaczyć $NWD(1 + 6X + 10X^2 + 4X^3 + X^4 + 3X^5, 6 + 7X + 2X^2 + X^3 + 7X^4 + 3X^5)$ w pierścieniu wielomianów $\mathbb{Z}_{11}[X]$.
 (c) Wyznaczyć $NWD[(18 + 16i) + (24 - 26i)X + (57 + 58i)X^2 + (19 - 7i)X^3 + (-21 - 2i)X^4 + (3 + i)X^5, (34 + 38i) + (63 - 41i)X + (120 + 129i)X^2 + (65 + 15i)X^3 + (-27 - 4i)X^4 + (3 + i)X^5]$ w pierścieniu wielomianów $\mathbb{C}[X]$.
- (11) (a) Wyznaczyć $a(X)$ i $b(X)$, jeżeli $a(X)$ i $b(X)$ są takimi wielomianami z pierścienia $\mathbb{Z}[X]$ o możliwie najniższych stopniach, że $a(X)(4X^2 + 3X^3 + 2X^4) + b(X)(2X^2 + 5X^3 + 7X^4) = -6X^2 - 28X^3 - 68X^4 - 81X^5 - 57X^6$.
 (b) Wyznaczyć $a(X)$ i $b(X)$, jeżeli $a(X)$ i $b(X)$ są takimi wielomianami z pierścienia $\mathbb{Z}_{11}[X]$ o możliwie najniższych stopniach, że $a(X)(5X^2 + 9X^3 + 8X^4) + b(X)(9X^2 + 2X^3 + 3X^4) = -8X^2 + 7X^4 + 2X^6$.
 (c) Wyznaczyć $a(X)$ i $b(X)$, jeżeli $a(X)$ i $b(X)$ są takimi wielomianami z pierścienia $\mathbb{C}[X]$ o możliwie najniższych stopniach, że $a(X)[(5 + 4i)X^2 + (9 - 2i)X^3 + (5 + 3i)X^4] + b(X)[(10 +$

- $9i)X^2 + (3 - 8i)X^3 + (4 + 7i)X^4] = (55 + 33i)X^2 + (126 + 82i)X^3 + (396 - 39i)X^4 + (29 - 58i)X^5 + (145 + 46i)X^6$.
- (12) (a) W ciele $GF(2^5)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^5 + X^2 + 1$ oblicz $(10101^{-1} + 01101) \cdot 10100$.
 (b) W ciele $GF(2^5)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^5 + X^3 + X^2 + X + 1$ oblicz $(10101^{-1} + 01101) \cdot 10100$.
 (c) W ciele $GF(2^5)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^5 + X^3 + 1$ oblicz $(10101^{-1} + 01101) \cdot 10100$.
 (d) W ciele $GF(2^5)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^5 + X^4 + X^3 + X + 1$ oblicz $(10101^{-1} + 01101) \cdot 10100$.
 (e) W ciele $GF(2^5)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + 1$ oblicz $(10101^{-1} + 01101) \cdot 10100$.
- (13) Następujące układy rozwiązać nad $\mathbb{Q}$ oraz nad $\mathbb{Z}_p$:
- (a) $\begin{cases} 2x + 7y + 3z + t = 6 \\ 3x + 5y + 2z + 2t = 4 \\ 9x + 4y + z + 7t = 2 \end{cases}, p = 11;$ (b) $\begin{cases} 9x - 3y + 5z + 6t = 4 \\ 9x - 3y + 5z + 6t = 4 \\ 3x - y + 3z + 14t = -8 \end{cases}, p = 13;$
- (c) $\begin{cases} 6x + 3y + 2z + 3t + 4w = 5 \\ 4x + 2y + z + 2t + w = 4 \\ 4x + 2y + 3z + 2t + w = 0 \\ 2x + y + 7z + 3t + 2w = 1 \end{cases}, p = 11$ (d) $\begin{cases} 2x - y + 3z - 7t = 5 \\ 6x - 3y + z - 4t = 7 \\ 4x - 2y + 14z - 31t = 18 \end{cases}, p = 37$
- (e) $\begin{cases} x + 2y + 3z - 2t + w = 4 \\ 3x + 6y + 5z - 4t + 3w = 5 \\ x + 2y + 7z - 4t + w = 11 \\ 2x + 4y + 2z - 3t + 3w = 6 \end{cases}, p = 13$ (f) $\begin{cases} 3x + 2y + 2z + 2t = 2 \\ 2x + 3y + 2z + 5t = 3 \\ 9x + y + 4z - 5t = 1 \\ 2x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ 7x + y + 6z - t = 7 \end{cases}, p = 7$
- (g) $\begin{cases} 2x + 3y + z + 2t = 4 \\ 4x + 3y + z + t = 5 \\ 5x + 11y + 3z + 2t = 2 \\ 2x + 5y + z + t = 1 \\ x - 7y - z + 2t = 7 \end{cases}, p = 17$
- (14) Rozwiązać nad ciałem $\mathbb{C}$ liczb zespolonych układ równań

$$\begin{cases} 6ix + (-3 + 6i)y + (4 + 2i)z + (1 + 2i)t = 0 \\ (5 + 5i)x + (3 + 5i)y + (7 - 3i)z + (4 + 2i)t = 0 \\ (-3 + 3i)x + (-6 + 3i)y + (-1 + 3i)z - t = 0 \\ (1 + 11i)x + (1 + 12i)y + (11 + 7i)z + 7it = 0 \end{cases}$$

przy założeniu:

- (a) $x = 0$, (b) $y = 0$, (c) $z = 0$, (d) $t = 0$, (e) $x + y = 0$.
- (15) Znaleźć wszystkie takie macierze $A \in K_2^2$, że
- (a) $A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A$, (b) $A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, (d) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, (e) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(16) Obliczyć następujące wyznaczniki (nad $\mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 4 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}, \\
 & \text{(d)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{(e)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{(f)} \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \\
 & \text{(g)} \begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}, \quad \text{(h)} \begin{vmatrix} 30 & 20 & 15 & 12 \\ 20 & 15 & 12 & 15 \\ 15 & 12 & 15 & 20 \\ 12 & 15 & 20 & 30 \end{vmatrix}, \quad \text{(i)} \begin{vmatrix} 5 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -7 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\
 & \text{(j)} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 20 & 50 & 140 & 140 \\ 0 & -16 & -70 & -195 & -560 & -560 \\ 0 & 26 & 125 & 366 & 1064 & 1064 \\ 0 & -31 & -154 & -460 & -1344 & -1344 \\ 0 & 4 & 20 & 60 & 176 & 175 \\ 0 & 4 & 20 & 60 & 175 & 176 \end{vmatrix}, \quad \text{(k)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

(17) Obliczyć wyznaczniki następujących macierzy stopnia n :

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{bmatrix}, \\
 & \text{(d)} \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}, \quad \text{(e)} \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & a & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & a \end{bmatrix}, \\
 & \text{(f)} \begin{bmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{bmatrix}, \quad \text{(g)} \begin{bmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

- (18) Sprawdzić, czy następujące macierze są odwracalne oraz w przypadku pozytywnej odpowiedzi obliczyć macierz odwrotną:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, (b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, (c) \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, (d) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(e) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (19) Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni K^4 są podprzestrzeniami wektorowymi:

- a) $U = \{[t, t+1, 0, 1] : t \in K\},$
- b) $U = \{[t, u, t+u, t-u] : t, u \in K\},$
- c) $U = \{[tu, u, t, 0] : t, u \in K\},$
- d) $U = \{[x, y, z, t] : x+y-z=0\},$
- e) $U = \{[x, y, z, t] : xy=0\},$
- f) $U = \{t[1, 0, 1, 0] + u[0, -1, 0, 1] : t, u \in K\}.$

- (20) Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^4$ są podprzestrzeniami liniowymi:

- a) $U = \{[t, u, t+u, t-u] : t \leq u\},$
- b) $U = \{[t, u, t, 0] : tu \geq 0\},$
- c) $U = \{[x, y, z, t] : x, y, z, t \in \mathbb{Q}\}.$

- (21) Wyznaczyć wszystkie podprzestrzenie przestrzeni

- a) $\mathbb{Z}_2^2$; b) $\mathbb{Z}_3^2$; c) $\mathbb{Z}_2^3$.

- (22) Pokazać, że jeśli U oraz W są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V , to $U \cup W$ jest podprzestrzenią przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy $U \subset W$ lub $W \subset U$.