

Zestaw zadań 3: Wielomiany. Konstrukcja ciał p^n -elementowych

- (1) W pierścieniu wielomianów $\mathbb{Z}_4[X]$ wykonać wskazane działanie:
 - (a) $(X^3 + 2X^2 + 3X + 1) + (X^4 + X^3 + 3X^2 + 2X + 2)$;
 - (b) $(2X^2 + X + 3) - (2X^4 + 3X^3 + X^2 + 3X)$;
 - (c) $(2X^3 + 2X^2 + 3)(3X^2 + X + 2)$;
 - (d) $(2X^4 + 3)(2X^4 + 1)$.
- (2) Podzielić wielomian f z resztą przez wielomian g :
 - (a) $f(X) = 5X^3 + 2X^2 - X - 7$, $g(X) = X^2 + 3X - 1$ w $\mathbb{Z}[X]$;
 - (b) $f(X) = 5X^3 + 2X^2 - X - 7$, $g(X) = X^2 + 3X - 1$ w $\mathbb{Z}_8[X]$;
 - (c) $f(X) = 2X^4 + X^3 + X^2 - X + 3$, $g(X) = 3X^2 + X + 4$ w $\mathbb{Z}_5[X]$;
 - (d) $f(X) = X^3 - 7$, $g(X) = X - 2$ w $\mathbb{Z}[X]$.
- (3) Wykorzystując schemat Hornera podzielić z resztą wielomian:
 - (a) $X^4 + 9X^3 + 23X^2 - 16X + 13$ przez $X - 5$ w $\mathbb{Z}[X]$,
 - (b) $X^5 + 4X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ przez $X + 1$ w $\mathbb{Z}[X]$,
 - (c) $X^4 + 3X + 2$ przez $X + 4$ w $\mathbb{Z}_6[X]$.
- (4) Dobrać liczby $a, b \in \mathbb{Z}$, aby wielomian $X^5 - 4X^3 + 2X^2 + aX + b \in \mathbb{Z}[X]$ przy dzieleniu przez $X - 1$ dawał resztę 1, a przy dzieleniu przez $X - 2$ resztę -5 .
- (5) Dobrać liczby $a, b \in \mathbb{Z}_6$, aby wielomian $2X^4 + 5X^3 + 4X^2 + aX + b \in \mathbb{Z}_6[X]$ przy dzieleniu przez $X + 1$ dawał resztę 5, a przy dzieleniu przez $X + 3$ resztę 1.
- (6) Wielomian o współczynnikach rzeczywistych przy dzieleniu przez $X - 2$ daje resztę 1 zaś przy dzieleniu przez $X - 1$ daje resztę 2. Jaką resztę daje ten wielomian przy dzieleniu przez $(X - 1)(X - 2)$?
- (7) Wielomian o współczynnikach z $\mathbb{Z}_5$ przy dzieleniu przez $X + 1$ daje resztę 2, przy dzieleniu przez $X + 2$ daje resztę 3 zaś przy dzieleniu przez $X + 3$ daje resztę 1. Jaką resztę daje ten wielomian przy dzieleniu przez $(X + 1)(X + 2)(X + 3)$?
- (8) Dobrać takie liczby całkowite a, b , aby wielomian $X^4 + 5X^3 + aX^2 + bX + 3 \in \mathbb{Z}[X]$ dzielił się przez wielomian $X^2 - 2X - 3$.
- (9)
 - (a) Wyznaczyć $NWD(15 + 4X + 21X^2 + 85X^3 - 73X^4 + 14X^5, 56 + 27X + 86X^2 + 337X^3 - 197X^4 + 21X^5)$ w pierścieniu wielomianów $\mathbb{R}[X]$.
 - (b) Wyznaczyć $NWD(1 + 6X + 10X^2 + 4X^3 + X^4 + 3X^5, 6 + 7X + 2X^2 + X^3 + 7X^4 + 3X^5)$ w pierścieniu wielomianów $\mathbb{Z}_{11}[X]$.
 - (c) Wyznaczyć $NWD[(18 + 16i) + (24 - 26i)X + (57 + 58i)X^2 + (19 - 7i)X^3 + (-21 - 2i)X^4 + (3 + i)X^5, (34 + 38i) + (63 - 41i)X + (120 + 129i)X^2 + (65 + 15i)X^3 + (-27 - 4i)X^4 + (3 + i)X^5]$ w pierścieniu wielomianów $\mathbb{C}[X]$.
- (10)
 - (a) Wyznaczyć $a(X)$ i $b(X)$, jeżeli $a(X)$ i $b(X)$ są takimi wielomianami z pierścienia $\mathbb{Z}[X]$ o możliwie najniższych stopniach, że $a(X)(4X^2 + 3X^3 + 2X^4) + b(X)(2X^2 + 5X^3 + 7X^4) = -6X^2 - 28X^3 - 68X^4 - 81X^5 - 57X^6$.
 - (b) Wyznaczyć $a(X)$ i $b(X)$, jeżeli $a(X)$ i $b(X)$ są takimi wielomianami z pierścienia $\mathbb{Z}_{11}[X]$ o możliwie najniższych stopniach, że $a(X)(5X^2 + 9X^3 + 8X^4) + b(X)(9X^2 + 2X^3 + 3X^4) = -8X^2 + 7X^4 + 2X^6$.
 - (c) Wyznaczyć $a(X)$ i $b(X)$, jeżeli $a(X)$ i $b(X)$ są takimi wielomianami z pierścienia $\mathbb{C}[X]$ o możliwie najniższych stopniach, że $a(X)[(5 + 4i)X^2 + (9 - 2i)X^3 + (5 + 3i)X^4] + b(X)[(10 + 9i)X^2 + (3 - 8i)X^3 + (4 + 7i)X^4] = (55 + 33i)X^2 + (126 + 82i)X^3 + (396 - 39i)X^4 + (29 - 58i)X^5 + (145 + 46i)X^6$.
- (11) (a) W ciele $GF(2^3)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^3 + X + 1$ oblicz $101 + 111 - 110$.

- (b) W ciele $GF(2^3)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^3 + X^2 + 1$ oblicz $101 + 111 - 110$.
- (12) (a) W ciele $GF(2^4)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^4 + X + 1$ oblicz $0101 \cdot 1100 + 0110$.
 (b) W ciele $GF(2^4)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^4 + X^3 + 1$ oblicz $0101 \cdot 1100 + 0110$.
- (13) (a) W ciele $GF(2^5)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^5 + X^2 + 1$ oblicz $(10101^{-1} + 01101) \cdot 10100$.
 (b) W ciele $GF(2^5)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^5 + X^3 + X^2 + X + 1$ oblicz $(10101^{-1} + 01101) \cdot 10100$.
 (c) W ciele $GF(2^5)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^5 + X^3 + 1$ oblicz $(10101^{-1} + 01101) \cdot 10100$.
 (d) W ciele $GF(2^5)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^5 + X^4 + X^3 + X + 1$ oblicz $(10101^{-1} + 01101) \cdot 10100$.
 (e) W ciele $GF(2^5)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + 1$ oblicz $(10101^{-1} + 01101) \cdot 10100$.
- (14) (a) W ciele $GF(2^3)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^3 + X + 1$ rozwiąż równanie $101X + 111 = 100$.
 (b) W ciele $GF(2^3)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^3 + X^2 + 1$ rozwiąż równanie $101X + 111 = 100$.
- (15) (a) W ciele $GF(2^4)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^4 + X + 1$ rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 1101X + 0010y = 1101 \\ 0110X + 0101y = 0011 \end{cases}$$

- (b) W ciele $GF(2^4)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^4 + X^3 + 1$ rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 1101X + 0010y = 1101 \\ 0110X + 0101y = 0011 \end{cases}$$

- (16) W ciele $GF(2^5)$ wyznaczonym przez wielomian $X^5 + X^2 + 1$ podać liczbę rozwiązań układu
- $$\begin{cases} 01101X + 10110y = 11100 \\ 11011X + 01100y = 11000 \end{cases}.$$
- (17) Wyznaczyć tabelkę kwadratów w ciele $GF(2^3)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^3 + X + 1$.
- (18) (a) W ciele $GF(2^4)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^4 + X + 1$ rozwiązać równanie $1001X^2 + 1010X + 1000 = 0000$.
 (b) W ciele $GF(2^4)$ zdefiniowanym przez wielomian $X^4 + X^3 + 1$ rozwiązać równanie $1001X^2 + 1010X + 1000 = 0000$.
- (19) (a) W pierścieniu wielomianów $GF(2^5)[X]$ nad ciałem 32-elementowym zdefiniowanym przez wielomian $X^5 + X^2 + 1$ wyznaczyć resztę z dzielenia wielomianu $01010X^3 + 11000X^2 + 10100X + 01110$ przez wielomian $10111X^2 + 0001X$.
 (b) W pierścieniu wielomianów $GF(2^5)[X]$ nad ciałem 32-elementowym zdefiniowanym przez wielomian $X^5 + X^3 + 1$ wyznaczyć resztę z dzielenia wielomianu $01010X^3 + 11000X^2 + 10100X + 01110$ przez wielomian $10111X^2 + 0001X$.
- (20) (a) Wyznaczyć $NWD(0001 + 0110X + 1010X^2 + 0100X^3 + 0001X^4 + 0011X^5, 0110 + 0111X + 0010X^2 + 0001X^3 + 0111X^4 + 0011X^5)$ w pierścieniu wielomianów $GF(2^4)[X]$ nad ciałem 16-elementowym zdefiniowanym przez wielomian $X^4 + X + 1$.
 (b) Wyznaczyć $NWD(0001 + 0110X + 1010X^2 + 0100X^3 + 0001X^4 + 0011X^5, 0110 + 0111X + 0010X^2 + 0001X^3 + 0111X^4 + 0011X^5)$ w pierścieniu wielomianów $GF(2^4)[X]$ nad ciałem 16-elementowym zdefiniowanym przez wielomian $X^4 + X^3 + 1$.

- (21) (a) Wyznaczyć $a(X)$ i $b(X)$, jeżeli $a(X)$ i $b(X)$ są takimi wielomianami z pierścienia wielomianów $GF(2^5)[X]$ nad ciałem 32-elementowym zdefiniowanym przez wielomian $X^5 + X^2 + 1$ o możliwie najniższych stopniach, że $a(X)(00101X^2 + 01001X^3 + 01000X^4) + b(X)(01001X^2 + 00010X^3 + 00011X^4) = 01000X^2 + 00111X^4 + 00010X^6$.
- (b) Wyznaczyć $a(X)$ i $b(X)$, jeżeli $a(X)$ i $b(X)$ są takimi wielomianami z pierścienia wielomianów $GF(2^5)[X]$ nad ciałem 32-elementowym zdefiniowanym przez wielomian $X^5 + X^3 + 1$ o możliwie najniższych stopniach, że $a(X)(00101X^2 + 01001X^3 + 01000X^4) + b(X)(01001X^2 + 00010X^3 + 00011X^4) = 01000X^2 + 00111X^4 + 00010X^6$.