

Zestaw zadań 2: Ciało liczb zespolonych.

- (1) Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych x, y spełniające równość:
a) $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$, b) $(2 + 3i)x + (4 - 5i)y = 6 - 2i$,
c) $(4 - 3i)2x + (1 + i)2y = 7 - 12i$, d) $\frac{2+i}{3-i}x + \frac{(4-i)^2}{3-i}y = 1 + i$.
- (2) Rozwiąż układy równań:
a) $\begin{cases} iz + w = 2 - 2i \\ (1 - i)z - iw = -1 + i \end{cases}$, b) $\begin{cases} (1 + i)z + 2w = i \\ (1 - i)z - (1 - i)w = -1 \end{cases}$.
- (3) Rozwiąż równania: a) $z\bar{z} + (\bar{z} - z) = 3 + 2i$, b) $i(\bar{z} + z) + i(z - \bar{z}) = 2i - 3$.
- (4) Rozwiąż równania:
a) $z^2 + 3z + 3 + i = 0$, b) $z^2 + (1 + 4i)z - (5 + i) = 0$,
c) $z^2 + z(1 + i) + 2i = 0$, d) $(4 - 3i)z^2 - (2 + 11i)z - (5 + i) = 0$.
- (5) Rozwiąż równania:
a) $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$, b) $z^4 + (15 + 7i)z^2 + 8 = 0$, c) $z^4 - (18 + 4i)z^2 + 77 - 36i = 0$.
- (6) Rozwiąż równania:
a) $(1 + i)z^2 - (3 + 7i)z + 10i = 0$; b) $(1 + 2i)z^2 - (-1 + 8i)z + (-5 + 5i) = 0$;
c) $(1 + 2i)z^2 - (1 + 7i)z + (-2 + 6i) = 0$; d) $(1 + i)z^2 - (1 + 5i)z + (-2 + 6i) = 0$.
- (7) Jakie twory na płaszczyźnie zespolonej określają równania i nierówności:
a) $|z| < 2$, b) $|z - 1| = 3$, c) $|z - 1 - 2i| \leq 3$, d) $1 < |z| < 5$,
e) $|z - c| + |z + c| = 2a$, f) $\frac{\pi}{2} < \text{Arg}(z) \leq \pi$, g) $|z - i| = |z + i|$,
- (8) Przedstaw w postaci trygonometrycznej następujące liczby zespolone:
 $1, -1, i, -i,$
 $1 + i, 1 - i, -1 + i, 1 + i\sqrt{3},$
 $-1 - i\sqrt{3}, \sqrt{3} - i, \sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}),$
- (9) Oblicz (podając dokładne wartości części rzeczywistej i urojonej):
a) $\frac{(1 - i)^{24}}{(\sqrt{3} - i)^{22}}$; b) $\frac{(1 - i\sqrt{3})^{42}}{(-1 + i)^{31}}$; c) $\frac{(-1 + i\sqrt{3})^{36}}{(1 + i)^{31}}$; d) $\frac{(1 - i)^{28}}{(\sqrt{3} + i)^{20}}$;
e) $\frac{(1 - i)^{28}}{(\sqrt{3} + i)^{20}}$; f) $\frac{(-1 + i)^{32}}{(-\sqrt{3} + i)^{28}}$; g) $\frac{(-1 - i)^{28}}{(1 - i\sqrt{3})^{20}}$.
- (10) Wyznacz pierwiastki zespolone i zaznacz je na płaszczyźnie Gaussa:
 $\sqrt{2}i, \sqrt{-8}i, \sqrt[3]{1}, \sqrt[4]{1}, \sqrt[3]{-8}i, \sqrt[5]{1}$