7. Wykład 7: Moduły projektywne i injektywne.

Twierdzenie 7.1. *Niech R będzie pierścieniem, P lewym R-modułem. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *dla każdego R-modułu N i homomorfizmu $h : P \to N$ zachodzi następujący warunek: dla każdego lewego R-modułu M i dla każdego epimorfizmu $g : M \to N$ istnieje homomorfizm $f : P \to M$ taki, że $h = g \circ f$; inaczej: diagram*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "h"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

w którym dolny wiersz jest dokładny, jest przemienny;

(2) *każdy ciąg dokładny*

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$$

rozszczepia się;

(3) *P jest składnikiem prostym pewnego lewego R-modułu M o następującej własności:*

istnieje podzbiór $\{f_i : i \in I\}$ zbioru M taki, że dla każdego lewego R-modułu N i jego rodziny elementów $\{h_i : i \in I\}$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $h : M \to N$ taki, że $h(f_i) = h_i$.

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2): załóżmy, że $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ jest ciągiem dokładnym. W diagramie

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "id"] & \\ N \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

wiersz jest dokładny, istnieje więc homomorfizm $f : P \to N$ taki, że $g \circ f = id_P$. Wobec Twierdzenia 5.1 ciąg $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ rozszczepia się.

(2) $\Rightarrow$ (3): wobec Twierdzenia 6.12 istnieją lewy R-moduł M o następującej własności:

istnieje podzbiór $\{f_i : i \in I\}$ zbioru M taki, że dla każdego lewego R-modułu N i jego rodziny elementów $\{h_i : i \in I\}$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $h : M \to N$ taki, że $h(f_i) = h_i$

oraz epimorfizm $g : M \to P$. Niech $K = \ker g$. Wówczas ciąg

$$0 \to K \hookrightarrow M \xrightarrow{g} P \to 0$$

jest dokładny, a więc rozszczepialny. Tym samym P jest składnikiem prostym modułu M.

(3) $\Rightarrow$ (1): niech M będzie lewym R-modułem o następującej własności:

istnieje podzbiór $\{f_i : i \in I\}$ zbioru M taki, że dla każdego lewego R-modułu N i jego rodziny elementów $\{h_i : i \in I\}$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $h : M \to N$ taki, że $h(f_i) = h_i$

oraz niech $M = P \oplus Q$. Niech $\pi : M \to P$ będzie rzutowaniem. Ustalmy moduły K i L, homomorfizm $h : P \to L$ i epimorfizm $g : K \to L$:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\pi"] & \\ & P \arrow[d, "h"] & \\ K \arrow[r, "\text{“na”}", "g"'] & L \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Wobec Twierdzenia 6.14 istnieje homomorfizm $f_1 : M \to L$ taki, że $h \circ \pi = g \circ f_1$. Tym samym odwzorowanie $f : P \to L$ dane wzorem $f = f_1 \restriction_P$ spełnia warunek $h = g \circ f$. $\square$

Uwaga 7.1. *Powyższe twierdzenie upraszcza się nieznacznie, gdy R jest pierścieniem z jedynką, a P lewym unitarnym R-modułem. Wówczas warunek (3) przybiera brzmienie:*

(3) *P jest składnikiem prostym pewnego modułu wolnego.*

Definicja 7.1. *Niech R będzie pierścieniem, P lewym R-modułem. Jeżeli P spełnia jeden (a zatem wszystkie) z równoważnych warunków Twierdzenia 7.1, to P nazywamy* **modułem projektywnym.**

Wniosek 7.1. *Każdy moduł wolny nad pierścieniem z jedynką jest projektywnym modułem unitarnym.*

Twierdzenie odwrotne do Wniosku 7.1 nie jest prawdziwe:
Przykład:

(1) Niech R_1 i R_2 będą pierścieniami z jedynką, niech $R = R_1 \times R_2$. R jest oczywiście lewym R-modułem. Oznaczmy $r_1 = (1_{R_1}, 0_{R_2})$ oraz $r_2 = (0_{R_1}, 1_{R_2})$. Wtedy $R = \langle r_1 \rangle + \langle r_2 \rangle$ oraz $\langle r_1 \rangle \cap \langle r_2 \rangle = \{0_R\}$, wobec czego $\langle r_1 \rangle$ jest składnikiem prostym R, a więc modułem projektywnym. Dla dowolnych $a_1, \ldots, a_k \in R$ zachodzi:
$$r_2 a_1 r_1 + \ldots + r_2 a_k r_1 = 0$$
oraz $r_2 \neq 0$, a więc $a_1 r_1, \ldots, a_k r_1$ są liniowo zależne. Tym samym $\langle r_1 \rangle$ nie ma bazy, więc nie może być wolny.

Okazuje się jednak, że niektóre moduły projektywne są wolne. Omówimy teraz kilka znanych przypadków, w których ma to miejsce.

Twierdzenie 7.2 (Cartana-Eilenberga). *Niech R będzie przemiennym pierścieniem lokalnym z jedynką, niech P będzie skończenie generowanym lewym unitarnym R-modułem projektywnym. Wówczas P jest wolny.*

Lemat 7.1. *Niech R będzie pierścieniem z jedynką, P skończenie generowanym lewym unitarnym R-modułem projektywnym. Wówczas istnieje skończenie generowany lewy unitarny R-moduł projektywny Q taki, że $P \oplus Q$ jest modułem wolnym skończonej rangi.*

Dowód. Niech N będzie lewym unitarnym R-modułem takim, że $F = P \oplus N$ jest wolny. Niech $\{f_i : i \in I\}$ będzie bazą F, a $m_1, \ldots, m_g$ zbiorem generatorów P. Każdy m_i jest kombinacją liniową skończonej liczby f_i, istnieje więc skończony podzbiór $J \subset I$ taki, że $F_0 = \sum_{j \in J} \langle f_j \rangle \supset P$.

Pokażemy, że $F_0 = P \oplus (N \cap F_0)$. Istotnie, ponieważ $F_0 \subset F = P \oplus N$, więc $P \cap (N \cap F_0) = \{0\}$. Ponadto $F_0 \supset P + (N \cap F_0)$. Skoro dla $f_0 \in F$ mamy $f_0 = m + n$, dla pewnych $m \in P$, $n \in N$, to $n = f_0 - m \in F_0$. Zatem $F_0 \subset P + (N \cap F_0)$.

Ponieważ F_0 jest skończenie generowanym modułem wolnym, więc $F_0/P \cong N \cap F_0$ jest skończenie generowany. Kładąc $Q = N \cap F_0$ otrzymujemy tezę. $\square$

Przechodzimy teraz do dowodu Twierdzenia 7.2.

Dowód. Niech Q będzie takim skończenie generowanym lewym unitarnym R-modułem projektywnym, że $F = P \oplus Q$ jest modułem wolnym skończonej rangi. Powiedzmy, że $F = \sum_{i=1}^{n} \langle f_i \rangle$. Ponieważ R jest przemiennym pierścieniem lokalnym z jedynką, zawiera dokładnie jeden ideał maksymalny I równy zbiorowi wszystkich elementów nieodwracalnych R, w konsekwencji więc $k = R/I$ jest ciałem. Wybierzmy bazę $(\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_n)$ przestrzeni wektorowej k^n i zdefiniujmy odwzorowanie $\Phi : F \to k^n$ wzorem:

$$\Phi(a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n) = (a_1 + I)\overline{f}_1 + \ldots + (a_n + I)\overline{f}_n.$$

Oznaczmy $\overline{F} = \Phi(F)$, $\overline{P} = \Phi(P)$ oraz $\overline{Q} = \Phi(Q)$. Wówczas $\overline{F} = \overline{P} \oplus \overline{Q}$ oraz $\overline{P}, \overline{Q} < \overline{F}$. Możemy zatem wybrać elementy $m_1, \ldots, m_l \in P$, $m_{l+1}, \ldots, m_n \in Q$ takie, że $\overline{m}_1 = \Phi(m_1), \ldots, \overline{m}_l = \Phi(m_l)$ jest bazą $\overline{P}$, $\overline{m}_{l+1} = \Phi(m_{l+1}), \ldots, \overline{m}_n = \Phi(m_n)$ jest bazą $\overline{Q}$ oraz $\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_n$ jest bazą $\overline{F}$. Niech

$$m_i = b_{1i} f_1 + \ldots + b_{ni} f_n, \text{ dla } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Wtedy $B = [b_{ji}] \in R_n^n$ jest macierzą przejścia od bazy $(f_1, \ldots, f_n)$ do układu $(m_1, \ldots, m_n)$, zaś $\overline{B} = [\bar{b}_{ji}] \in k_n^n$, gdzie $\bar{b}_{ji} = \Phi(b_{ji})$, jest macierzą przejścia od bazy $(\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_n)$ do bazy $(\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_n)$. Tym samym $\det \overline{B} \neq 0_{R/I} = I$, a więc $\det B \notin I$, co oznacza, że $\det B$ jest elementem odwracalnym pierścienia R, a więc i macierz B jest odwracalna, co w konsekwencji oznacza, że układ $(m_1, \ldots, m_n)$ jest bazą F. Zatem dla dowolnego $m \in M$ istnieje jednoznaczne przedstawienie postaci

$$m = a_1 m_1 + \ldots + a_l m_l + q, \text{ dla pewnych } a_1, \ldots, a_l \in R, q \in Q,$$

skąd, w szczególności, dla $m \in P$:

$$m = a_1 m_1 + \ldots + a_l m_l.$$

Wobec tego moduł P jest wolny. □

Twierdzenie to można istotnie wzmocnić, a mianowicie można pominąć w nim założenie tego, że pierścień R jest przemienny, a moduł P skończenie generowany:

Twierdzenie 7.3 (Kaplansky'ego). *Niech R będzie pierścieniem lokalnym z jedynką, niech P będzie lewym unitarnym R-modułem projektywnym. Wówczas P jest wolny.*[1]

Z punktu widzenia geometrii algebraicznej ważnym zagadnieniem jest wiedzieć, które moduły projektywne nad pierścieniami wielomianów są wolne. Kompletną odpowiedź na tak postawione pytanie jest następujące twierdzenie z połowy lat 70-tych:

Twierdzenie 7.4 (Seshardi-Quillena-Suslina). *Niech F będzie ciałem, niech P będzie lewym unitarnym $F[x_1, \ldots, x_n]$-modułem projektywnym. Wówczas P jest wolny.*[2]

Uwaga 7.2. *Niech R będzie pierścieniem, niech M będzie lewym R-modułem. Wówczas M jest homomorficznym obrazem pewnego modułu projektywnego.*

Dowód wynika wprost z Twierdzeń 6.12 i 7.1.

Twierdzenie 7.5. *Niech R będzie pierścieniem, niech $\{P_i : i \in I\}$ będzie rodziną lewych R-modułów. Wówczas $\sum_{i \in I} P_i$ jest modułem projektywnym wtedy i tylko wtedy, gdy P_i, $i \in I$, są modułami projektywnymi.*

---

[1] I. Kaplansky, *Projective modules,* Ann. of Math. (2) 68 (1968), 372 – 380.

[2] twierdzenie pokazane przez Cartana i Eilenberga dla $n = 1$ około 1950 roku, dla $n > 1$ sformułowane jako "hipoteza Serre'a" w 1955, dla $n = 2$ wykazane w 1958 przez Seshardi. Ogólny przypadek został rozwiązany w dwóch niezależnych pracach: D. Quillen, *Projective modules over polynomial rings,* Invent. Math. 36 (1976), 167 – 171 oraz A. Suslin, *Projective modules over polynomial rings are free,* Dokl. Akad. Nauk SSSR 229 (1976), 1063 – 1066.

Dowód. ($\Rightarrow$): załóżmy, że $\sum_{i\in I} P_i$ jest modułem projektywnym i ustalmy $i \in I$. Zauważmy, że wówczas

$$\sum_{i\in I} P_i = P_i \oplus \sum_{j\in I\setminus\{i\}} P_j.$$

Niech $\pi : \sum_{i\in I} P_i \to P_i$ będzie zatem rzutowaniem. Ustalmy moduły K i L, homomorfizm $h : P_i \to L$ i epimorfizm $g : K \to L$:

$$\begin{tikzcd} & \sum_{i\in I} P_i \arrow[d, "\pi"] & \\ & P_i \arrow[d, "h"] & \\ K \arrow[r, "g"] & L \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Ponieważ $\sum_{i\in I} P_i$ jest projektywny, istnieje homomorfizm $f_1 : \sum_{i\in I} P_i \to L$ taki, że $h \circ \pi = g \circ f_1$. Tym samym odwzorowanie $f : P_i \to L$ dane wzorem $f = f_1 \restriction_{P_i}$ spełnia warunek $h = g \circ f$.

($\Leftarrow$): Załóżmy, że P_i, $i \in I$, są projektywne. Niech $\iota_i : P_i \to \sum_{i\in I} P_i$, $i \in I$, będą kanonicznymi monomorfizmami. Załóżmy także, że w diagramie

$$\begin{tikzcd} & \sum_{i\in I} P_i \arrow[d, "h"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

dolny wiersz jest dokładny. Dla ustalonego $i \in I$ rozważmy diagram

$$\begin{tikzcd} & P_i \arrow[d, "\iota_i"] & \\ & \sum_{i\in I} P_i \arrow[d, "h"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Ponieważ P_i jest projektywny, więc istnieje homomorfizm $f_i : P_i \to M$ taki, że $g \circ f_i = h \circ \iota_i$. Dalej, wobec własności uniwersalnej koproduktu modułów, istnieje dokładnie jeden homomorfizm $f : \sum_{i\in I} P_i \to M$ taki, że

$$f \circ \iota_i = f_i.$$

Wówczas $g \circ f \circ \iota_i = g \circ f_i = h \circ \iota_i$, dla $i \in I$, skąd wynika $g \circ f = h$. $\square$

Jako przykład zastosowań powyższego twierdzenia powrócimy na chwilę do rozważań kiedy dany moduł projektywny jest wolny i w szczególności udowodnimy twierdzenie Seshardi-Quillena-Suslina w przypadku $n = 1$.

Lemat 7.2. *Niech R będzie pierścieniem, niech M będzie modułem, niech $\{M_i : i \in I\}$ będzie rodziną podmodułów modułu M, niech $(I, \leqslant)$ będzie zbiorem dobrze uporządkowanym o elemencie najmniejszym 0, w którym, dla danego elementu $i \in I$, przez $i + 1$ oznaczamy najmniejszy element zbioru $\{j \in I : i \leqslant j \wedge i \neq j\}$. Niech ponadto spełnione będą następujące warunki:*

(1) *jeśli $i \leqslant j$, to $M_i \subset M_j$,*
(2) *$M_0 = \{0\}$,*

(3) *jeśli i jest elementem granicznym zbioru I, to* $M_i = \bigcup_{j<i} M_j$,
(4) $M = \bigcup_{i\in I} M_i$,
(5) *moduły ilorazowe* M_{i+1}/M_i *są projektywne.*

Wówczas $M \cong \sum_{i\in I} M_{i+1}/M_i$.

Dowód. Ustalmy $i \in I$ i rozważmy ciąg dokładny

$$0 \to M_i \xrightarrow{id_{M_i}} M_{i+1} \xrightarrow{\kappa} M_{i+1}/M_i \to 0.$$

Ponieważ moduł M_{i+1}/M_i jest projektywny, więc ciąg się rozszczepia. Tym samym istnieje podmoduł M_i' modułu M_{i+1} taki, że $M_{i+1} = M_i' \oplus M_i$. Wobec Wniosku **??** $M_i' \cong M_{i+1}/M_i$, a zatem M_i' jest projektywny.

Pokażemy, że $M = \sum_{i\in I} M_i'$. Niech $M' = \langle \bigcup_{i\in I} M_i' \rangle$. Pokażemy najpierw, że $M' = \sum_{i\in I} M_i'$. W tym celu wystarczy pokazać, że dowolny element $m \in M'$ ma jednoznaczne przedstawienie postaci $m_1' + \ldots + m_n'$, dla $m_i' \in M_{k_i}'$. Przypuśćmy bowiem, że dla pewnego elementu $m \in M'$ istnieją dwa przedstawienia:

$$m = m_1' + \ldots + m_n' = m_1'' + \ldots + m_n'', \text{ dla } m_i', m_i'' \in M_{k_i}'.$$

Wówczas $(m_1' - m_1'') + \ldots + (m_n' - m_n'') = 0$. Niech $m_1 = m_1' - m_1'', \ldots m_n = m_n' - m_n''$. Stąd $m_1 + \ldots + m_n = 0$, $m_i \in M_{k_i}'$, a zatem $m_n = -(m_1 + \ldots + m_{n-1})$. Zmieniając ewentualnie numerację możemy założyć, że $k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_n$, a wówczas, wobec (1), $m_1, \ldots, m_{n-1} \in M_{k_n}$ oraz jednocześnie $m_1, \ldots, m_{n-1} \in M_n'$. Zatem $m_n = -(m_1 + \ldots + m_{n-1}) \in M_{k_n} \cap M_{k_n}' = \{0\}$. Podobnie możemy pokazać, że $m_1 = \ldots = m_{n-1} = 0$.

Pozostaje pokazać, że $M' = M$. Oczywiście $M' \subset M$, przypuśćmy zatem, że $M' \subsetneq M$. Wobec (4) istnieje $j \in J$ takie, że $M_j \not\subset M'$. Niech i_0 będzie najmniejszym j o tej własności. Wobec (3), i_0 nie jest elementem granicznym I, w przeciwnym bowiem razie $M_{i_0} = \bigcup_{j<i_0} M_j$, a więc dla pewnego $j < i_0$ zachodziłoby $M_j \not\subset M'$. Tym samym $i_0 = i_1 + 1$, dla pewnego $i_1 \in I$. Niech $m_{i_0} \in M_{i_0}$ będzie takim elementem, że $m_{i_0} \notin M'$. Ponieważ $M_{i_0} = M_{i_1} \oplus M_{i_1}'$, więc $m_{i_0} = m_{i_1} + m_{i_1}'$, dla pewnych $m_{i_1} \in M_{i_1}$, $m_{i_1}' \in M_{i_1}'$. Skoro $i_1 < i_0$, to $M_{i_1} \subset M'$. Oczywiście też $M_{i_1}' \subset M'$. Zatem $m_{i_0} \in M'$, co daje sprzeczność. □

Twierdzenie 7.6. *Niech R będzie pierścieniem z jedynką, niech każdy lewostronny ideał pierścienia R będzie lewym unitarnym R-modułem projektywnym (lub, odpowiednio, wolnym). Wówczas każdy podmoduł dowolnego lewego unitarnego R-modułu projektywnego jest projektywny (lub, odpowiednio, wolny).*

Dowód. Ponieważ moduł projektywny jest podmodułem modułu wolnego, wystarczy pokazać, że podmoduł modułu wolnego jest projektywny (lub, odpowiednio,wolny).

Niech F będzie modułem wolnym z bazą $\{f_i : i \in I\}$, zaś $(I, \leqslant)$ zbiorem dobrze uporządkowanym, niech $F_i = \langle \{f_j : j < i\} \rangle$. Ustalmy podmoduł F' modułu F. Wówczas rodzina podmodułów $F_i' = F' \cap F_i$ spełnia warunki (1) – (5) poprzedniego lematu względem F'.

Pokażemy, że F_{i+1}'/F_i' są izomorficzne z ideałami pierścienia R. Dla ustalonego $i \in I$ zdefiniujmy odwzorowanie $\phi_i : \{f_j : j \in I\} \to R$ warunkiem

$$\phi_i(f_j) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i \neq j \\ 1, & \text{gdy } i = j. \end{cases}$$

Istnieją zatem homomorfizmy $\phi_i^* : F \to R$ takie, że $\phi_i^* \restriction_{\{f_j : j\in I\}} = \phi_i$, $i \in I$. Wówczas $\ker \phi_i^* \cap F_{i+1}' = F_i'$, więc $F_{i+1}'/F_i' = F_{i+1}'/\ker \phi_i^* \cap F_{i+1}' \cong \phi_i^*(F_{i+1}') \subset R$. Ponadto $\phi_i^*(F_{i+1}')$ jest podmodułem modułu R, a więc ideałem pierścienia R.

Wobec założenia, moduły F_{i+1}'/F_i' są projektywne (lub, odpowiednio, wolne). Stosując Twierdzenie 7.5 (lub, odpowiednio, odwołując się wprost do definicji modułu wolnego), otrzymujemy zatem, że F' jest projektywny (lub, odpowiednio, wolny). □

Wniosek 7.2. *Niech R będzie pierścieniem z jedynką, niech każdy lewostronny ideał pierścienia R będzie modułem wolnym. Wówczas każdy lewy unitarny R-moduł projektywny jest wolny.*

Przykłady:

(2) Niech R będzie pierścieniem ideałów głównych z jedynką. Wówczas każdy lewy unitarny R-moduł projektywny jest wolny.
(3) Niech F będzie ciałem. Wówczas każdy lewy unitarny $F[x]$-moduł projektywny jest wolny.

Definicja 7.2. *Pierścień R nazywamy* **pierścieniem dziedzicznym,** *jeżeli każdy podmoduł dowolnego lewego R-modułu projektywnego jest projektywny.*

Pierścień R nazywamy **półprostym,** *jeżeli każdy lewy R-moduł jest projektywny.*

Definicja 7.3. *Niech R będzie pierścieniem, J lewym R-modułem. Jeżeli dla każdego R-modułu M i homomorfizmu $h : M \to J$ zachodzi następujący warunek: dla każdego lewego R-modułu N i dla każdego monomorfizmu $g : M \to N$ istnieje homomorfizm $f : N \to J$ taki, że $h = f \circ g$ (inaczej: diagram*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & N \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & J & \end{tikzcd}$$

w którym górny wiersz jest dokładny, jest przemienny), to moduł J nazywamy **modułem injektywnym.**

Twierdzenie 7.7. *Niech R będzie pierścieniem, niech $\{J_i : i \in I\}$ będzie rodziną lewych R-modułów. Wówczas $\prod_{i \in I} J_i$ jest modułem injektywnym wtedy i tylko wtedy, gdy J_i, $i \in I$, są modułami injektywnymi.*

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla modułów projektywnych i pozostawiamy go czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Ponieważ pojęcia modułu wolnego nie da się dualizować, to znaczy nie istnieje coś takiego jak moduł kowolny, więc nie można udowodnić rezultatów dualnych do Wniosku 7.1 (to znaczy nie istnieje twierdzenie, orzekające że "każdy moduł kowolny jest modułem injektywnym"), ani do Uwagi 7.1 (to znaczy nie istnieje twierdzenie orzekające, że "moduł jest injektywny wtedy i tylko wtedy, gdy jest składnikiem prostym modułu kowolnego"). Okazuje się jednak, że można dualizować Uwagę 7.2, to znaczy można udowodnić twierdzenie orzekające, że "w każdy moduł można zanurzyć pewien moduł injektywny", skąd z kolei wynika prosta dualizacja Twierdzenia 7.1 (1) i (2). Pozostałą część niniejszego wykładu poświęcimy dowodowi takiej dualizacji, ograniczając się wszakże do przypadku lewych R-modułów unitarnych nad pierścieniami z jedynką.

Zaczniemy od następującej charakteryzacji unitarnych modułów injektywnych.

Twierdzenie 7.8 (lemat Baer'a)**.** *Niech R będzie pierścieniem z jedynką, J lewym unitarnym R-modułem. Wówczas J jest injektywny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego lewostronnego ideału $I \lhd R$ wraz z kanonicznym zanurzeniem $w : I \hookrightarrow R$ i homomorfizmu $h : I \to J$ istnieje homomorfizm $f : R \to J$ taki, że*

$$h = f \circ w.$$

Inaczej: diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & R \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & J & \end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Dowód. Implikacja ($\Rightarrow$) wynika wprost z definicji modułu injektywnego, pozostaje więc udowodnić implikację ($\Leftarrow$). Rozważmy diagram o dokładnym wierszu:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & N \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & J. & \end{tikzcd}$$

Niech

$$\mathcal{S} = \{(N', f') : N' < N, \operatorname{im} g \subset N', f' : N' \to J \text{ jest homomorfizmem takim, że } h = f' \circ g\restriction_{g^{-1}(N')}\}$$

i zdefiniujmy w zbiorze $\mathcal{S}$ relację $\prec$ warunkiem

$$(N', f') \prec (N'', f'') \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } N' \subset N'' \wedge f''\restriction_{N'} = f'.$$

Z łatwością sprawdzamy, że $\mathcal{S} \neq \emptyset$, $\prec$ jest relacją częściowego porządku oraz że każdy łańcuch w $\mathcal{S}$ ma ograniczenie górne. Tym samym, wobec lematu Kuratowskiego-Zorna, w $\mathcal{S}$ istnieje element maksymalny (N_0, f_0).

Pokażemy, że $N_0 = N$. Na odwrót, przypuśćmy, że istnieje $n \in N$ taki, że $n \notin N_0$. Niech N_1 będzie podmodułem generowanym przez zbiór $N_0 \cup \{n\}$. Wówczas

$$N_1 = \{n_0 + rn : n_0 \in N_0, r \in R\}.$$

Niech ponadto $I = \{r \in R : rn \in N_0\}$. Bez trudu sprawdzamy, że I jest lewostronnym ideałem pierścienia R, zaś odwzorowanie $\alpha : I \to N_0$ dane wzorem $\alpha(r) = rn$ jest homomorfizmem. Rozważmy diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "f_0\circ\alpha"] & R \arrow[d, dashed, "f"] \\ & N_0 \arrow[r, "f_0"'] & J. \end{tikzcd}$$

Wobec założenia istnieje homomorfizm $f : R \to J$ taki, że $f \circ w = f_0 \circ \alpha$. Zdefiniujmy odwzorowanie $f_1 : N_1 \to J$ wzorem

$$f_1(n_0 + nr) = f_0(n_0) + rf(1).$$

Pokażemy, że f_1 jest dobrze zdefiniowane. Załóżmy bowiem, że $n_0 + rn = n_0' + r'n$. Wówczas $(r - r')n = n_0' - n_0 \in N_0$, więc $r - r' \in I$. Stąd $f_0(n_0' - n_0) = f_0((r - r')n) = f_0 \circ \alpha(r - r') = f(r - r') = (r - r')f(1)$, więc $f_0(n_0) + rf(1) = f_0(n_0') + r'f(1)$.

Równie prosto sprawdzamy, że f_1 jest homomorfizmem. Tym samym $(N_1, f_1) \in \mathcal{S}$ oraz $(N_0, f_0) \precneqq (N_1, f_1)$, co daje sprzeczność. $\square$

Wniosek 7.3. *Niech R będzie pierścieniem z jedynką, J lewym unitarnym R-modułem. Wówczas J jest injektywny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego lewostronnego ideału $I \lhd R$ i homomorfizmu $h : I \to J$ istnieje element $j \in J$ taki, że*

$$h(r) = rj, \text{ dla } r \in R.$$

Dowód. ($\Rightarrow$): Ustalmy lewostronny ideał $I \lhd R$ wraz z włożeniem $w : I \hookrightarrow R$ i rozważmy diagram:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & R \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & J & \end{tikzcd}$$

W szczególności, dla ustalonego $r \in I$:

$$h(r) = f \circ w(r) = f(w(r)) = f(r) = r \cdot f(1_R)$$

i możemy przyjąć $j = f(1_R)$.

($\Leftarrow$): Ustalmy lewostronny ideał $I \lhd R$ wraz z włożeniem $w : I \hookrightarrow R$ i rozważmy diagram:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & R \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & J & \end{tikzcd}$$

gdzie homomorfizm $f : R \to J$ zdefiniowany jest wzorem $f(r) = rj$, dla $r \in R$. Wobec lematu Baer'a moduł J jest injektywny. $\square$

Twierdzenie 7.9. *Niech R będzie pierścieniem z jedynką, niech M będzie lewym R-modułem unitarnym. Wówczas istnieje moduł injektywny J, w który zanurza się w M.*

Dowód. Ustalmy pierścień z jedynką R i lewy unitarny R-moduł M. Rozważmy rodzinę

$$\mathcal{F} = \{(I, \phi) : I \text{ jest ideałem lewostronnym pierścienia } R, \phi : I \to M \text{ jest homomorfizmem}\}.$$

Niech $F = \sum_{(I,\phi)\in\mathcal{F}} \langle x_{(I,\phi)} \rangle$, gdzie $\langle x_{(I,\phi)} \rangle \cong R$ dla $(I, \phi) \in \mathcal{F}$, będzie modułem wolnym o bazie $\{x_{(I,\phi)} : (I, \phi) \in \mathcal{F}\}$. Zdefiniujmy moduł $Q_1(M) = F \times M/\langle\{(-rx_{(I,\phi)}, \phi(r)) : (I, \phi) \in \mathcal{F}, r \in I\}\rangle$ oraz oznaczmy przez $\nu : F \times M \to Q_1(M)$ epimorfizm kanoniczny dany wzorem

$$\nu(f, m) = (f, m) + \langle\{(-rx_{(I,\phi)}, \phi(r)) : (I, \phi) \in \mathcal{F}, r \in I\}\rangle.$$

Wówczas oczywiście $\ker \nu = \langle\{(-rx_{(I,\phi)}, \phi(r)) : (I, \phi) \in \mathcal{F}, r \in I\}\rangle$. Zdefiniujmy ponadto homomorfizm $w_1 : M \to Q_1(M)$ wzorem

$$w_1(m) = \nu(0, m)$$

oraz, dla ustalonego $(I, \phi) \in \mathcal{F}$, parę homomorfizmów $w_\phi : R \to F \times M$ oraz $\phi' : R \to Q_1(M)$ wzorami:

$$w_\phi(r) = (rx_{(I,\phi)}, 0)$$

oraz

$$\phi'(r) = \nu \circ w_\phi(r).$$

Wówczas, dla ustalonych $(I, \phi) \in \mathcal{F}$ oraz $r \in R$:

$$\phi'(r) = \nu(rx_{(I,\phi)}, 0) = \nu(0, \phi(r)) = w_1(\phi(r)),$$

a zatem, dla ustalonego $(I, \phi) \in \mathcal{F}$, diagram

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "w"] \arrow[dd, "\phi"'] & & R \arrow[dl, "w_\phi"] \arrow[dd, "\phi'"] \\ & F \times M \arrow[dr, "\nu"] & \\ M \arrow[ur, "\iota_2"] \arrow[rr, "w_1"'] & & Q_1(M) \end{tikzcd}$$

jest przemienny, przy czym $\iota_2 : M \to F \times M$ oznacza tu kanoniczne włożenie.

Pokażemy, że w_1 jest monomorfizmem. Ustalmy w tym celu $m \in \ker w_1$. Wówczas $(0, m) \in \ker \nu$, a więc dla pewnych $(I_1, \phi_1), \dots, (I_n, \phi_n) \in \mathcal{F}$ i dla pewnych $r_1, \dots, r_n \in R$ zachodzi:

$$(0, m) = \sum_{i=1}^{n} (-r_i x_{(I_i, \phi_i)}, \phi_i(r_i)).$$

Ponieważ moduł F jest wolny, więc w szczególności $r_1 = \ldots = r_n = 0$, skąd $\phi_i(r_i) = 0$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$, a tym samym $m = 0$.

Wobec tego możemy identyfikować elementy $m \in M$ i $w_1(m) \in Q_1(M)$. Tym samym, dla ustalonego $(I, \phi) \in \mathcal{F}$ i dla $r \in I$:

$$\phi(r) = w_1(\phi(r)) = v(w_\phi(r)) = r \cdot v \circ w_\phi(1_R),$$

czyli $\phi(r) = r \cdot j$, dla pewnego $j \in Q_1(M)$.

Zdefiniujmy liczbę α warunkiem $|R| = \aleph_\alpha$, gdy R jest nieskończony oraz $\alpha = -1$, gdzy R jest skończony. Dla dowolnej liczby porządkowej $\xi < \omega_{\alpha+1}$ definiujemy rekurencyjnie

- $Q_0(M) = M$,
- $Q_\xi(M) = Q_1(Q_\zeta(M))$, gdy $\xi = \zeta + 1$,
- $Q_\xi(M) = \bigcup_{\eta < \xi} Q_\eta(M)$, gdy ξ jest graniczna.

Niech

$$J = \bigcup_{\xi < \omega_{\alpha+1}} Q_\xi(M).$$

Oczywiście $M \hookrightarrow J$.

Pokażemy, że Q jest injektywny. Ustalmy lewostronny ideał $I \lhd R$ i homomorfizmu $h : I \to J$. Wówczas $|\operatorname{im} h| \leqslant \aleph_\alpha$, więc dla pewnej liczby porządkowej $\xi < \omega_{\alpha+1}$ zachodzi $\operatorname{im} h \subset Q_\xi(M)$. Rozważmy diagram:

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[rr, "w"] \arrow[dd, "\phi"'] & & R \arrow[dl, "w_\phi"] \arrow[ddd, "\phi'"] \\
& F \times Q_\xi(M) \arrow[ddr, "\nu"] & \\
\operatorname{im} h \arrow[d] & & \\
Q_\xi(M) \arrow[uur, "\iota_2"] \arrow[rr, "w_1"'] & & Q_1(Q_\xi(M)) = Q_{\xi+1}(M)
\end{tikzcd}$$

Istnieje zatem przedłużenie $\phi' : R \to Q_{\xi+1}(M) \subset J$ homomorfizmu h, a więc h jest postaci

$$h(r) = r \cdot j,$$

dla pewnego $j \in J$. Wobec Wniosku 7.3, moduł J jest injektywny. $\square$

Twierdzenie 7.1 (1) i (2) można teraz prosto zdualizować w następujący sposób:

Twierdzenie 7.10. *Niech R będzie pierścieniem z jedynką, J lewym unitarnym R-modułem. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *moduł J jest injektywny;*

(2) *każdy ciąg dokładny*

$$0 \to J \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

rozszczepia się;

(3) *J jest składnikiem prostym każdego modułu, którego jest podmodułem.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2): Załóżmy, że ciąg

$$0 \to J \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

jest dokładny. W szczególności, w diagramie

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_J"'] & M \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & J & \end{tikzcd}$$

wiersz jest dokładny, istnieje więc homomorfizm $h : M \to J$ taki, że $h \circ f = id_J$. Wobec Twierdzenia 5.1 ciąg $0 \to J \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ rozszczepia się.

(2) $\Rightarrow$ (3): Dla dowolnego modułu M, dla którego J jest podmodułem, ciąg

$$0 \to J \xrightarrow{\subset} M \xrightarrow{\kappa} M/J \to 0$$

jest rozszczepialnym ciągiem dokładnym, więc $\operatorname{im} J \cong J$ jest składnikiem prostym M.

(3) $\Rightarrow$ (1): Wobec Twierdzenia 7.9 J jest podmodułem pewnego modułu injektywnego Q. Wobec (3) oraz Twierdzenia 7.7, J jest injektywny. □

Na zakończenie podamy jeszcze zastosowanie Wniosku 7.3 (a więc, pośrednio, lematu Baer'a) do wskazania ważnego przykładu modułów injektywnych.

Definicja 7.4. *Niech* $(D, +)$ *będzie grupą abelową. Grupę* D *nazywamy* **podzielną,** *jeżeli*

$$\forall y \in D \forall n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \exists x \in D (nx = y).$$

Przykład:

(1) Grupa $\mathbb{Q}$ jest podzielna.

Uwaga 7.3. *Każda grupa abelowa podzielna jest* $\mathbb{Z}$*-modułem injektywnym.*

Dowód. Niech $(D, +)$ będzie grupą abelową podzielną. Jedynymi ideałami pierścienia $\mathbb{Z}$ są ideały główne (n), $n \in \mathbb{Z}$, a zatem jeżeli $h : (n) \to D$ jest homomorfizmem, to istnieje $x \in D$ takie, że $h(n) = nx$. Zdefiniujmy $f : \mathbb{Z} \to D$ wzorem

$$f(m) = mx.$$

Wówczas f jest homomorfizmem oraz $h = f \circ w$, gdzie $w : (n) \hookrightarrow \mathbb{Z}$ jest kanonicznym włożeniem. □