5. Wykład 5: Rozszczepialne ciągi dokładne.

Definicja 5.1. *Niech R będzie pierścieniem, M lewym R-modułem. Podmoduł N modułu M nazywamy* **składnikiem prostym,** *jeżeli $M = N \oplus K$ dla pewnego podmodułu K.*

Ciąg dokładny

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$$

nazywamy **ciągiem rozszczepialnym,** *gdy podmoduł $\operatorname{im} f$ jest składnikiem prostym M_2.*

Twierdzenie 5.1. *Niech R będzie pierścieniem, niech ciąg*

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$$

będzie dokładny. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) *ciąg $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ jest rozszczepialny,*
(2) *istnieje homomorfizm $\overline{f} : M_2 \to M_1$ taki, że $\overline{f} \circ f = id_{M_1}$,*
(3) *istnieje homomorfizm $\overline{g} : M_3 \to M_2$ taki, że $g \circ \overline{g} = id_{M_2}$.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2): załóżmy, że $M_2 = \operatorname{im} f \oplus N_2$ dla pewnego podmodułu N_2. Wówczas, ponieważ f jest różnowartościowy, dowolny $m_2 \in M_2$ można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$m_2 = f(m_1) + n_2, \text{ dla pewnych } m_1 \in M_1, n_2 \in N_2.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie $\overline{f} : M_2 \to M_1$ wzorem $\overline{f}(f(m_1)+n_2) = m_1$. Bez trudu sprawdzamy, że $\overline{f}$ jest homomorfizmem. Ponadto $\overline{f} \circ f(m_1) = \overline{f}(f(m_1)) = m_1$.

(2) $\Rightarrow$ (3): załóżmy, że $\overline{f} : M_2 \to M_1$ jest takim homomorfizmem, że $\overline{f} \circ f = id_{M_1}$. Odwzorowanie $id_{M_2} - f \circ \overline{f} : M_2 \to M_2$ jest homomorfizmem. Ponadto:

$$(id_{M_2} - f \circ \overline{f}) \circ f = f - f \circ \overline{f} \circ f = f - f = 0_{M_2}$$

i tym samym diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "0"] & M_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "id_{M_2} - f\circ\overline{f}"] & M_3 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M_2 \arrow[r, "id_{M_2}"'] & M_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

jest przemienny, a jego wiersze są ciągami dokładnymi. Wobec Twierdzenia 3.2 istnieje homomorfizm $\overline{g} : M_3 \to M_2$ taki, że $\overline{g} \circ g = id_{M_2} \circ (id_{M_2} - f \circ \overline{f})$. Zatem $g \circ \overline{g} \circ g = g - g \circ f \circ \overline{f} = g$, gdyż ciąg $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ jest dokładny i stąd $g \circ f = 0_{M_3}$. Skoro zaś g jest epimorfizmem, to $g \circ \overline{g} = id_{M_2}$.

(3) $\Rightarrow$ (1): załóżmy, że $\overline{g} : M_3 \to M_2$ jest takim homomorfizmem, że $g \circ \overline{g} = id_{M_2}$. Wówczas dla $m_2 \in M_2$ mamy:

$$g(m_2 - \overline{g}(g(m_2))) = g(m_2) - g(m_2) = 0_{M_3}$$

zatem $m_2 - \overline{g}(g(m_2)) \in \ker g = \operatorname{im} f$. Wobec tego $M_2 = \operatorname{im} f + \operatorname{im} \overline{g}$. Ustalmy $m_2 \in \operatorname{im} f \cap \operatorname{im} \overline{g}$. Wtedy $m_2 = f(m_1) = \overline{g}(m_3)$ dla pewnych $m_1 \in M_1$, $m_3 \in M_3$. Wobec tego $g(m_2) = g(\overline{g}(m_3)) = g(f(m_1))$. Ale $g(\overline{g}(m_3)) = m_3$ oraz $g \circ f = 0_{M_3}$, więc $m_3 = 0$. Stąd $m_2 = 0$, a zatem $M_2 = \operatorname{im} f \oplus \operatorname{im} \overline{g}$. ☐

Twierdzenie 5.2. *Niech R będzie pierścieniem. Ciąg*

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$$

jest rozszczepialnym ciągiem dokładnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją homomorfizmy $\overline{f} : M_2 \to M_1$ *oraz* $\overline{g} : M_3 \to M_2$ *takie, że*

(1) $\overline{f} \circ f = id_{M_1}$, $g \circ \overline{g} = id_{M_3}$,
(2) $g \circ f = 0_{M_3}$, $\overline{f} \circ \overline{g} = 0_{M_1}$,
(3) $f \circ \overline{f} + \overline{g} \circ g = id_{M_2}$.

Dowód. ($\Rightarrow$): załóżmy, że $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ jest rozszczepialnym ciągiem dokładnym. Wobec tego $g \circ f = 0_{M_3}$. Wobec Twierdzenia 5.1 istnieją $\overline{f} : M_2 \to M_1$ oraz $\overline{g} : M_3 \to M_2$ takie, że spełniony jest warunek (1) twierdzenia. Z dowodu implikacji (2) $\Rightarrow$ (3) Twierdzenia 5.1 wynika, że $g \circ \overline{g} \circ g = g - g \circ f \circ \overline{f}$, więc $g = g \circ (f \circ \overline{f} + \overline{g} \circ g)$ i skoro g jest surjekcją, to spełniony jest warunek (3). Wobec tego:

$$\overline{f} = \overline{f} \circ id_{M_2} = \overline{f} \circ (f \circ \overline{f} + \overline{g} \circ g) = \overline{f} + \overline{f} \circ \overline{g} \circ g,$$

więc $\overline{f} \circ \overline{g} \circ g = 0$. Jednak ponieważ g jest surjekcją, więc $\overline{f} \circ \overline{g} = 0_{M_1}$.

($\Leftarrow$): załóżmy, że istnieją homomorfizmy $\overline{f} : M_2 \to M_1$ oraz $\overline{g} : M_3 \to M_2$ takie, że spełnione są warunki (1) – (3). Wobec warunku (1) f jest monomorfizmem, a g jest epimorfizmem. Ponieważ $g \circ f = 0_{M_3}$, więc $\ker g \supset \operatorname{im} f$. Ponadto, gdy $m_2 \in \ker g$, to wobec warunku (3):

$$m_2 = f(\overline{f}(m_2)) + \overline{g}(g(m_2)) = f \circ \overline{f}(m_2),$$

więc $m_2 \in \operatorname{im} f$ i tym samym $\ker g = \operatorname{im} f$. Zatem ciąg

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$$

jest dokładny i rozszczepialny na podstawie Twierdzenia 5.1. $\square$

Wniosek 5.1. *Niech R będzie pierścieniem, $M, M_1, \ldots, M_n$ lewymi R-modułami. Wówczas $M \cong M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją homomorfizmy $f_i : M_i \to M$ oraz $g_i : M \to M_i$ takie, że*

(1) $g_i \circ f_i = id_{M_i}$, *dla* $i \in \{1, \ldots, n\}$,
(2) $g_i \circ f_j = 0_{M_i}$, *dla* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$,
(3) $f_1 \circ g_1 + \ldots + f_n \circ g_n = id_M$.

Dowód. ($\Rightarrow$): załóżmy, że $M \cong M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$. Bez trudu sprawdzamy, że odwzorowania $f_i : M_i \to M$ dane wzorem

$$f_i(m_i) = m_i, \text{ dla } m_i \in M_i, i \in \{1, \ldots, n\},$$

oraz $g_i : M \to M_i$ dane wzorem

$$g_i(m_1 + \ldots + m_i + \ldots + m_n) = m_i, \text{ dla } m = m_1 + \ldots + m_i + \ldots + m_n \in M, i \in \{1, \ldots, n\},$$

spełniają warunki (1) – (3).

($\Leftarrow$): załóżmy, że istnieją homomorfizmy $f_i : M_i \to M$ oraz $g_i : M \to M_i$ spełniające warunki (1) – (3). Dla ustalonego $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ rozważmy ciąg

$$0 \to M_{i_0} \xrightarrow{f_{i_0}} M \xrightarrow{g_1 + \ldots + g_{i_0-1} + g_{i_0+1} + \ldots + g_n} M_1 \oplus \ldots \oplus M_{i_0-1} \oplus M_{i_0+1} \oplus \ldots \oplus M_n \to 0$$

oraz odwzorowanie $f_1 + \ldots + f_{i_0-1} + f_{i_0+1} + \ldots + f_n : M_1 \oplus \ldots \oplus M_{i_0-1} \oplus M_{i_0+1} \oplus \ldots \oplus M_n \to M$. Wobec założeń, $g_{i_0} \circ f_{i_0} = id_{M_{i_0}}$. Ponadto

$$\begin{aligned}
&(g_1 + \ldots + g_{i_0-1} + g_{i_0+1} + \ldots + g_n) \circ (f_1 + \ldots + f_{i_0-1} + f_{i_0+1} + \ldots + f_n) \\
&\qquad (m_1 + \ldots + m_{i_0-1} + m_{i_0+1} + \ldots + m_n) \\
&= \; g_1 \circ f_1(m_1) + \ldots + g_{i_0-1} \circ f_{i_0-1}(m_{i_0-1}) + g_{i_0+1} \circ f_{i_0+1}(m_{i_0+1}) + \ldots + g_n \circ f_n(m_n) \\
&= \; m_1 + \ldots + m_{i_0-1} + m_{i_0+1} + \ldots + m_n.
\end{aligned}$$

Wobec założenia, $g_{i_0} \circ (f_1 + \ldots + f_{i_0-1} + f_{i_0+1} + \ldots + f_n) = 0_{M_{i_0}}$. Ponadto

$$(g_1 + \ldots + g_{i_0-1} + g_{i_0+1} + \ldots + g_n) \circ f_{i_0} = 0_{M_1 \oplus \ldots \oplus M_{i_0-1} \oplus M_{i_0+1} \oplus \ldots \oplus M_n}.$$

Na koniec

$$f_{i_0} \circ g_{i_0} + (f_1 + \ldots + f_{i_0-1} + f_{i_0+1} + \ldots + f_n) \circ (g_1 + \ldots + g_{i_0-1} + g_{i_0+1} + \ldots + g_n) = id_M.$$

Wobec Twierdzenia 5.1 omawiany ciąg jest rozszczepialnym ciągiem dokładnym, a więc $f_{i_0}(M_{i_0})$ jest składnikiem prostym M. Ponieważ $g_{i_0} \circ f_{i_0} = id_{M_{i_0}}$, więc f_{i_0} jest injekcją. Tym samym $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n \cong f_1(M_1) \oplus \ldots \oplus f_n(M_n) = M$. □

Wniosek 5.2. *Niech R będzie pierścieniem, M lewym R-modułem, N podmodułem modułu N, a $\kappa : M \to M/N$ epimorfizmem kanonicznym danym wzorem*

$$\kappa(m) = m + N.$$

Wówczas N jest składnikiem prostym M wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje homomorfizm $h : M/N \to M$ taki, że $\kappa \circ h = id_{M/N}$.

Dowód. Wobec Twierdzenia 5.1 moduł $N = \operatorname{im} \mathrm{id}_N$ jest składnikiem prostym M wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg dokładny

$$0 \to N \xrightarrow{id_N} M \xrightarrow{\kappa} M/N \to 0$$

jest rozszczepialny, a więc gdy istnieje homomorfizm $h : M/N \to M$ taki, że $\kappa \circ h = id_{M/N}$. □