4. Wykład 4: Produkty grup. Produkty i koprodukty grup abelowych. Produkty i koprodukty modułów.

Przypomnijmy konstrukcje słabych iloczynów (sum) prostych i iloczynów (sum) prostych grup znane z kursowego wykładu algebry. Ze względu na sposób, w jaki konstrukcje te na ogół się wprowadza, można je dodatkowo podzielić na konstrukcje wewnętrzne i zewnętrzne.

Uwaga 4.1. *Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $H_1, H_2 < G$. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $G = H_1 H_2$ *oraz* $H_1 \cap H_2 = \{1\}$,

(2) *każdy element $g \in G$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci*
$$g = h_1 h_2,$$
gdzie $h_1 \in H_1$ oraz $h_2 \in H_2$.

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2): Załóżmy, że $G = H_1 H_2$ oraz $H_1 \cap H_2 = \{1\}$. Załóżmy, że dla pewnych $h_1, h_1' \in H_1$ oraz $h_2, h_2' \in H_2$ zachodzi $h_1 h_2 = h_1' h_2'$. Wówczas $(h_1')^{-1} h_1 = h_2' h_2^{-1} \in H_1 \cap H_2 = \{1\}$, więc $h_1 = h_1'$ oraz $h_2 = h_2'$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Załóżmy, że każdy element $g \in G$ ma jednoznaczne przedstawienie postaci $g = h_1 h_2$, gdzie $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$. Wówczas oczywiście $G = H_1 H_2$. Załóżmy, że $g \in H_1 \cap H_2$. Wówczas $g = g \cdot 1 = 1 \cdot g$. Zatem $g = 1$. $\square$

Oznaczenie: Gdy $(G, +)$ zapisana jest w notacji addytywnej, piszemy $H_1 + H_2$ zamiast $H_1 H_2$.

Definicja 4.1. *Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $H_1, H_2 < G$.*

(1) *G jest* **słabym iloczynem (sumą) wewnętrznym** *podgrup H_1 i H_2, gdy spełnia jeden (a więc wszystkie) warunki Uwagi 4.1.*

(2) *G jest* **słabym iloczynem (sumą) półprostym wewnętrznym** *podgrup H_1 i H_2, gdy jest słabym iloczynem (sumą) wewnętrznym oraz $H_1 \lhd G$ lub $H_2 \lhd G$.*

(3) *G jest* **słabym iloczynem (sumą) prostym wewnętrznym** *podgrup H_1 i H_2, gdy jest słabym iloczynem (sumą) wewnętrznym oraz $H_1 \lhd G$ i $H_2 \lhd G$.*

Przykłady:

(1) Rozważmy grupę $D(n)$. Niech $Obr(n)$ oznacza grupę obrotów, a $Odb(n)$ dowolną dwuelementową grupę generowaną przez odbicie. Wówczas $D(n) = Obr(n) \cdot Odb(n)$ jest słabym iloczynem półprostym wewnętrznym, ale nie jest słabym iloczynem prostym wewnętrznym.

(2) Rozważny grupę abelową $(A, \cdot)$. Każda podgrupa grupy abelowej jest normalna, a więc

A jest słabym iloczynem wewnętrznym $\Leftrightarrow$ A jest słabym iloczynem półprostym wewnętrznym $\Leftrightarrow$ A jest słabym iloczynem prostym wewnętrznym.

Uwaga 4.2. *Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $H_1, H_2 < G$. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *odwzorowanie $\phi : H_1 \times H_2 \to G$ dane wzorem $\phi(h_1, h_2) = h_1 h_2$ jest izomorfizmem;*

(2) $G = H_1 H_2$, $H_1 \cap H_2 = \{1\}$ *oraz* $\forall h_1 \in H_1 \forall h_2 \in H_2 (h_1 h_2 = h_2 h_1)$;

(3) *G jest słabym iloczynem prostym wewnętrznym podgrup H_1 i H_2.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2) : Ponieważ ϕ jest izomorfizmem, więc jest surjekcją, a zatem $G = H_1 H_2$. Ustalmy $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$. Wówczas:
$$h_1 h_2 = \phi(h_1, h_2) = ((\phi(h_1, h_2))^{-1})^{-1} = (\phi(h_1^{-1}, h_2^{-1}))^{-1} = (h_1^{-1} h_2^{-1})^{-1} = ((h_2 h_1)^{-1})^{-1} = h_2 h_1.$$
Przypuśćmy, że istnieje $1 \neq g \in H_1 \cap H_2$. Wówczas $\phi(1, g) = g = \phi(g, 1)$, wbrew założeniu, że ϕ jest izomorfizmem, a więc injekcją.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Wystarczy udowodnić, że $H_1 \lhd G$ i $H_2 \lhd G$. Ustalmy $g \in G$ i niech $g = h_1 h_2$ dla $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$. Ustalmy $h \in H_1$. Wówczas:

$$ghg^{-1} = h_1 h_2 h (h_1 h_2)^{-1} = h_1 h_2 h h_2^{-1} h_1^{-1} = h_1 h_2 h_2^{-1} h h_1^{-1} = h_1 h h_1^{-1} \in H_1,$$

a zatem $gH_1 g^{-1} \subset H_1$. Podobnie pokazujemy, że $H_2 \lhd G$.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Ponieważ G jest słabym iloczynem prostym wewnętrznym, a więc w szczególności słabym iloczynem wewnętrznym, więc odwzorowanie ϕ jest dobrze określoną bijekcją. Ustalmy $(h_1, h_2), (h_1', h_2') \in H_1 \times H_2$. Wówczas:

$$\phi((h_1, h_2) \cdot (h_1', h_2')) = \phi(h_1 h_1', h_2 h_2') = h_1 h_1' h_2 h_2' = h_1 h_2 h_1' h_2' = \phi(h_1, h_2)\phi(h_1', h_2'),$$

a więc ϕ jest homomorfizmem. □

Definicja 4.2. *Niech H_1, H_2 będą grupami. Grupę $H_1 \times H_2$ nazywamy* **iloczynem (sumą) prostym zewnętrznym** *grup H_1 i H_2.*

Oznaczenie: Gdy H_1 i H_2 zapisane są w notacji addytywnej, piszemy $H_1 \oplus H_2$ zamiast $H_1 \times H_2$. Ze względu na izomorfizm z Uwagi 4.2, będziemy na ogół mówić po prostu o iloczynach (sumach) prostych, bez rozróżniania między słabymi iloczynami (sumami) prostymi wewnętrznymi a iloczynami (sumami) prostymi zewnętrznymi. Opisane konstrukcje w naturalny sposób przenoszą się na dowolną skończoną liczbę grup. W ten sposób mówimy o iloczynach (sumach) prostych grup $H_1, \ldots, H_n$, które oznaczać będziemy przez $H_1 \times \ldots \times H_n$, lub $H_1 \oplus \ldots \oplus H_n$ w notacji addytywnej.

Konstrukcje te przenoszą się także na nieskończoną liczbę grup. Zobaczymy, że w tym przypadku słabe iloczyny (sumy) i iloczyny (sumy) na ogół różnią się od siebie.

Definicja i uwaga 4.1. *Niech $\{G_i : i \in I\}$ będzie rodziną (możliwie nieskończoną) grup, niech*

$$\prod_{i \in I} G_i = \{f : I \to \bigcup_{i \in I} G_i : f(i) \in G_i\}$$

będzie produktem kartezjańskim rodziny zbiorów $\{G_i : i \in I\}$. Jeżeli $f, g \in \prod_{i \in I} G_i$, to iloczyn $f \cdot g$ definiujemy jako funkcję $f \cdot g : I \to \bigcup_{i \in I} G_i$ daną wzorem

$$f \cdot g(i) = f(i)g(i).$$

$(\prod_{i \in I} G_i, \cdot)$ jest grupą, którą nazywamy **iloczynem prostym zewnętrznym** *lub, krótko,* **produktem grup.**

Ponadto definiujemy odwzorowania $\pi_i : \prod_{i \in I} G_i \to G_i$ wzorem

$$\pi_i(a) = a(i),$$

dla $i \in I$. π_i, $i \in I$, są dobrze określonymi epimorfizmami grup, które nazywamy **epimorfizmami kanonicznymi.**

Dowód powyższej uwagi pozostawiamy czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Definicja i uwaga 4.2. *Niech $\{G_i : i \in I\}$ będzie rodziną (możliwie nieskończoną) grup, niech*

$$\prod_{i \in I} G_i = \{f : I \to \bigcup_{i \in I} G_i : f(i) \in G_i\}$$

będzie produktem kartezjańskim rodziny zbiorów $\{G_i : i \in I\}$. W zbiorze $\prod_{i \in I} G_i$ rozpatrzmy podzbiór

$$\prod_{i \in I}{}^{w} G_i = \{f \in \prod_{i \in I} G_i : f(i) = 1_{G_i} \text{ dla prawie wszystkich } i \in I\}.$$

Iloczyn $f \cdot g$, dla $f, g \in \coprod_{i\in I}^{w} G_i$ definiujemy jak w grupie $\prod_{i\in I} G_i$. $(\coprod_{i\in I}^{w} G_i, \cdot)$ jest grupą, którą nazywamy **słabym iloczynem prostym zewnętrznym.** *W przypadku, gdy grupy G_i, $i \in I$, są abelowe, piszemy na ogół $\coprod_{i\in I} G_i$ i słaby iloczyn prosty zewnętrzny nazywamy* **koproduktem grup abelowych**, *a w przypadku, gdy G_i, $i \in I$, są abelowe i zapisane w notacji addytywnej, piszemy na ogół $\sum_{i\in I} G_i$ i koprodukt grup abelowych nazywamy* **sumą grup abelowych.**

Ponadto definiujemy odwzorowania $\iota_i : G_i \to \coprod_{i\in I}^{w} G_i$ wzorem

$$\iota_i(a) = \overline{a}, \text{ gdzie } \overline{a}(j) = \begin{cases} a, & \text{gdy } j = i, \\ 1_{G_j}, & \text{gdy } j \neq i, \end{cases}$$

dla $i \in I$. ι_i, $i \in I$, są dobrze określonymi monomorfizmami grup, które nazywamy **monomorfizmami kanonicznymi.**

Dowód powyższej uwagi pozostawiamy czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Uwaga 4.3. *Oczywiście w przypadku, gdy I jest zbiorem skończonym $\prod_{i\in I} G_i = \coprod_{i\in I}^{w} G_i$. Uzasadnia to terminologię przyjętą w Definicji 4.2.*

Odpowiednikiem Uwagi 4.1 dla przypadku nieskończonego jest:

Uwaga 4.4. *Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $\{H_i : i \in I\}$ będzie rodziną (możliwie nieskończoną) podgrup normalnych grup G. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $G = \coprod_{i\in I}^{w} G_i$,

(2) *każdy element $g \in G \setminus \{1\}$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci*

$$g = h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_n},$$

gdzie $i_1, \ldots, i_n$ są różnymi elementami zbioru I oraz $h_{i_k} \neq 1$, $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Odpowiednikiem Uwagi 4.2 dla przypadku nieskończonego jest:

Uwaga 4.5. *Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $\{H_i : i \in I\}$ będzie rodziną (możliwie nieskończoną) podgrup normalnych grup G. Wówczas, jeżeli*

(1) $G = \left\langle \bigcup_{i\in I} H_i \right\rangle$ *oraz*

(2) *dla każdego $k \in I$, $N_k \cap \left\langle \bigcup_{i\in I\setminus\{k\}} H_i \right\rangle$,*

to $G \cong \coprod_{i\in I}^{w} H_i$.

Dowód. Jeżeli $a \in \coprod_{i\in I}^{w} H_i$, to wówczas $a(i) = 1$, dla prawie wszystkich $i \in I$. Niech zatem I_0 będzie skończonym zbiorem

$$\{i \in I : a(i) \neq 1\}.$$

Wówczas $\prod_{i\in I_0} a(i)$ jest dobrze zdefiniowanym elementem grupy G, ponieważ dla $a(i) \in N_i$ oraz $a(j) \in N_j$, $j \neq i$, $i, j \in I_0$, zachodzi $a(i)a(j) = a(j)a(i)$, jako że podgrupy H_i, $i \in I$, są normalne. W rezultacie odwzorowanie $\phi : \coprod_{i\in I}^{w} H_i \to G$ dane wzorem

$$\phi(a) = \prod_{i\in I_0} a(i)$$

jest dobrze określonym homomorfizmem.

Ustalmy $a \in G$. Ponieważ podgrupy $\{N_i : i \in I\}$ generują grupę G, element $a \in G$ można zapisać jako skończony iloczyn elementów z różnych podgrup N_i. Ponadto, ponieważ podgrupy N_i, $i \in I$, są normalne, mnożenie elementów z różnych podgrup N_i i N_j, $i \neq j$, jest przemienne, element $a \in G$ możemy zapisać jako iloczyn

$$a = \prod_{i \in I_0} a_i,$$

dla pewnego skończonego podzbioru $I_0 \subset I$. Tym samym $\prod_{i \in I_0} \iota_i(a_i) \in \coprod_{i \in I}^{w} N_i$ oraz

$$\phi\left(\prod_{i \in I_0} \iota_i(a_i)\right) = \prod_{i \in I_0} \phi \circ \iota_i(a_i) = \prod_{i \in I_0} a_i = a$$

i tym samym ϕ jest epimorfizmem.

Ustalmy $a \in \ker \phi$ i niech, jak poprzednio, $I_0 = \{i \in I : a(i) \neq 1\}$. Powiedzmy, że $I_0 = \{i_1, \ldots, i_n\}$. Wówczas $\phi(a) = \prod_{i \in I_0} = a(i_1) \cdot \ldots \cdot a(i_n) = 1$, skąd w szczególności

$$a(i_1)^{-1} = a(i_2) \cdot \ldots \cdot a(i_n) \in N_{i_1} \cap \left\langle \bigcup_{i \in I_0 \setminus \{i_1\}} \right\rangle = \{1\},$$

a więc $a(i_1) = 1$. Powtarzając ten sam argument dla $i_2, \ldots, i_n$, otrzymujemy, że $a = 1$. Tym samym ϕ jest monomorfizmem. $\square$

Powyższe twierdzenie można częściowo odwrócić:

Uwaga 4.6. *Niech $\{G_i : i \in I\}$ będzie rodziną (możliwie nieskończoną) grup. Wówczas:*

(1) $\coprod_{i \in I}^{w} \lhd \prod_{i \in I} G_i$;
(2) $\iota_i(G_i) \lhd \coprod_{i \in I} G_i$, *dla każdego $i \in I$.*

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Przechodzimy teraz do dowodu dwóch ważnych twierdzeń podających własności uniwersalne produktów grup i grup abelowych oraz koproduktów grup abelowych.

Twierdzenie 4.1. *Niech $\{G_i : i \in I\}$ będzie rodziną grup (lub grup abelowych), H pewną grupą (lub grupą abelową), niech $\{\phi_i : H \to G_i : i \in I\}$ będzie rodziną homomorfizmów grup. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\phi : H \to \prod_{i \in I} G_i$ taki, że*

$$\pi_i \circ \phi = \phi_i,$$

dla $i \in I$. Innymi słowy, następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, dashed, "\phi"] \arrow[dr, "\phi_i"'] & \prod_{i \in I} G_i \arrow[d, "\pi_i"] \\ & G_i \end{tikzcd}$$

Ponadto jeśli grupa (lub grupa abelowa) G ma powyższą własność, to wówczas $G \cong \prod_{i \in I} G_i$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy dla grup, rozumowanie dla grup abelowych jest identyczne. Pokażemy najpierw istnienie stosownego homomorfizmu. W tym celu zdefiniujmy funkcję $\phi : H \to \prod_{i \in I} G_i$ wzorem

$$\phi(a) = \overline{a}, \text{ gdzie } \overline{a}(i) = \phi_i(a).$$

Funkcja ta jest homomorfizmem, gdyż dla $a, b \in H$ zachodzi

$$\overline{ab}(i) = \phi_i(ab) = \phi_i(a)\phi_i(b) = \overline{a}(i)\overline{b}(i),$$

a więc $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.

Homomorfizm ten jest wyznaczony jednoznacznie, załóżmy bowiem, że $\phi' : H \to \prod_{i\in I} G_i$ jest innym homomorfizmem takim, że $\pi_i \circ \phi' = \phi_i$, dla $i \in I$. Natenczas, dla dowolnego $a \in H$:

$$\phi(a)(i) = \pi_i(\phi(a)) = \phi_i(a) = \pi_i(\phi'(a)) = \phi'(a)(i),$$

a więc $\phi(a) = \phi'(a)$, zatem $\phi = \phi'$, wobec dowolności $a \in H$.

Pozostaje sprawdzić, że jeżeli G jest grupą wraz z rodziną epimorfizmów $\{\pi_i' : G \to G_i : i \in I\}$ taką, że dla dowolnej grupy H i rodziny homomorfizmów $\{\phi_i : H \to G_i : i \in I\}$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\phi' : H \to G$ taki, że

$$\pi_i \circ \phi' = \phi_i,$$

to wówczas $G \cong \prod_{i\in I} G_i$. Istotnie, załóżmy, że G jest taką właśnie grupą i zastosujmy powyższą własność biorąc w charakterze grupy H i rodziny $\{\phi_i : H \to G_i : i \in I\}$ produkt $\prod_{i\in I} G_i$ wraz z rodziną epimorfizmów kanonicznych. Istnieje zatem homomorfizm $\phi' : \prod_{i\in I} \to G$ taki, że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} G_i \arrow[r, dashed, "\phi'"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & G \arrow[d, "\pi_i'"] \\
 & G_i.
\end{tikzcd}$$

Na odwrót, korzystając z własności uniwersalnej produktu, biorąc tym razem w charakterze grupy H i rodziny $\{\phi_i : H \to G_i : i \in I\}$ grupę G wraz z rodziną $\{\pi_i' : G \to G_i : i \in I\}$ otrzymujemy istnienie homomorfizmu $\phi : G \to \prod_{i\in I} G_i$ takiego, że diagram

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, dashed, "\phi"] \arrow[d, "\pi_i'"'] & \prod_{i\in I} G_i \arrow[dl, "\pi_i"] \\
G_i &
\end{tikzcd}$$

jest przemienny. Łącząc te dwa diagramy w jeden otrzymujemy:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, dashed, "\phi'\circ\phi"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & & G \arrow[dl, "\pi_i"] \\
 & G_i &
\end{tikzcd}$$

skąd w szczególności $\phi'\circ\phi : G \to G$ jest takim homomorfizmem, że $\pi_i'\circ(\phi'\circ\phi) = \pi_i'$. Korzystając raz jeszcze z własności uniwersalnej grupy G zastosowanej do niej samej wraz z epimorfizmami $\{\pi_i' : G \to G_i : i \in I\}$ wiemy, że istnieje dokładnie jeden homomorfizm o tej własności, co $\phi' \circ \phi$. Z drugiej strony widzimy, że własność tę trywialnie spełnia homomorfizm identycznościowy $id_G : G \to G$. Tym samym $\phi' \circ \phi = id_G$. Podobnie pokazujemy, że także $\phi \circ \phi' = id_{\prod_{i\in I} G_i}$, a zatem, w szczególności, ϕ jest bijekcją, a więc i izomorfizmem. □

Twierdzenie 4.2. *Niech $\{G_i : i \in I\}$ będzie rodziną grup abelowych, H pewną grupą abelową, niech $\{\phi_i : G_i \to H : i \in I\}$ będzie rodziną homomorfizmów grup. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\phi : \coprod_{i\in I} G_i \to H$ taki, że*

$$\phi \circ \iota_i = \phi_i,$$

dla $i \in I$. Innymi słowy, następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} G_i \arrow[r, dashed, "\phi"] & H \\
G_i \arrow[u, "\iota_i"] \arrow[ur, "\phi_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Ponadto jeśli grupa abelowa G ma powyższą własność, to wówczas $G \cong \coprod_{i\in I} G_i$.

Dowód. Pokażemy istnienie stosownego homomorfizmu. Dla ustalonego $a \in \coprod_{i\in I} G_i$ tylko dla skończenie wielu indeksów $i \in I$ $a(i) \neq 1$ – powiedzmy, że $I_0 = \{i \in I : a_i \neq 1\} = \{i_1, \ldots, i_r\}$. Zdefiniujmy zatem odwzorowanie $\phi : \coprod_{i\in I} G_i \to H$ wzorem

$$\phi(a) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } a = 1, \\ \phi_{i_1}(a_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \phi_{i_r}(a_{i_r}) = \prod_{i\in I_0} \phi_i(a_i), & \text{gdy } a \neq 1. \end{cases}$$

Korzystając z faktu, że H jest przemienna, bez trudu sprawdzamy, że ϕ jest homomorfizmem. Wprost z określenia ϕ wynika też, że $\phi \circ \iota = \phi_i$. Podobnie jak w poprzednim dowodzie sprawdzamy, że ϕ jest wyznaczone jednoznacznie oraz że własność uniwersalna definiuje koprodukt z dokładnością do izomorfizmu. $\square$

Uwaga 4.7. *Czytelnik zechce podać przykład dwóch grup nieabelowych, których iloczyn kartezjański nie spełnia powyższej własności uniwersalnej.*

To, co dotychczas udowodniliśmy dla grup abelowych, można w bardzo naturalny sposób przenieść na przypadek modułów. W szczególności zdefiniujemy produkty i koprodukty modułów jako produkty i koprodukty odpowiadających im grup abelowych wyposażonych w odpowiednie działanie zewnętrzne, a także udowodnimy własności uniwersalne produktów i koproduktów modułów.

Definicja i uwaga 4.3. *Niech R będzie pierścieniem, niech $\{M_i : i \in I\}$ będzie rodziną (możliwie nieskończoną) lewych R-modułów, niech $\prod_{i\in I} M_i$ będzie produktem rodziny grup abelowych $\{M_i : i \in I\}$. Jeżeli $a \in R$ oraz $m \in \prod_{i\in I} M_i$, to iloczyn $a \cdot m$ definiujemy jako funkcję $a \cdot m : I \to \bigcup_{i\in I} M_i$ daną wzorem*

$$a \cdot m(i) = am(i).$$

$(\prod_{i\in I} M_i, \cdot)$ jest lewym R-modułem, który nazywamy **produktem modułów.**

Ponadto definiujemy odwzorowania $\pi_i : \prod_{i\in I} M_i \to M_i$ wzorem

$$\pi_i(m) = m(i),$$

dla $i \in I$. π_i, $i \in I$, są dobrze określonymi epimorfizmami modułów, które nazywamy **epimorfizmami kanonicznymi.**

Dowód powyższej uwagi pozostawiamy czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Definicja i uwaga 4.4. *Niech R będzie pierścieniem, niech $\{M_i : i \in I\}$ będzie rodziną (możliwie nieskończoną) lewych R-modułów, niech $\sum_{i\in I} M_i$ będzie koproduktem rodziny grup abelowych $\{M_i : i \in I\}$. Jeżeli $a \in R$ oraz $m \in \sum_{i\in I} M_i$, to iloczyn $a \cdot m$ definiujemy jako funkcję $a \cdot m : I \to \bigcup_{i\in I} M_i$ daną wzorem*

$$a \cdot m(i) = am(i).$$

$(\sum_{i\in I} M_i, \cdot)$ jest lewym R-modułem, który nazywamy **koproduktem** *(lub* **sumą***)* **modułów.**

Ponadto definiujemy odwzorowania $\iota_i : M_i \to \sum_{i\in I}^{w} M_i$ *wzorem*

$$\iota_i(m) = \overline{m},\ \textit{gdzie}\ \overline{m}(j) = \begin{cases} m, & \textit{gdy}\ j = i, \\ 0_{M_j}, & \textit{gdy}\ j \neq i, \end{cases}$$

dla $i \in I$. ι_i, $i \in I$, *są dobrze określonymi monomorfizmami modułów, które nazywamy* **monomorfizmami kanonicznymi.**

Dowód powyższej uwagi pozostawiamy czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Twierdzenie 4.3. *Niech* R *będzie pierścieniem, niech* $\{M_i : i \in I\}$ *będzie rodziną lewych* R*-modułów,* N *pewnym lewym* R*-modułem, niech* $\{\phi_i : N \to M_i : i \in I\}$ *będzie rodziną homomorfizmów modułów. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm* $\phi : N \to \prod_{i\in I} M_i$ *taki, że*

$$\pi_i \circ \phi = \phi_i,$$

dla $i \in I$. *Innymi słowy, następujący diagram jest przemienny:*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, dashed, "\phi"] \arrow[dr, "\phi_i"'] & \prod_{i\in I} M_i \arrow[d, "\pi_i"] \\ & M_i \end{tikzcd}$$

Ponadto jeśli moduł M *ma powyższą własność, to wówczas* $M \cong \prod_{i\in I} M_i$.

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup i pozostawiamy go czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Twierdzenie 4.4. *Niech* R *będzie pierścieniem, niech* $\{M_i : i \in I\}$ *będzie rodziną lewych* R*-modułów,* N *pewnym lewym* R*-modułem, niech* $\{\phi_i : M_i \to N : i \in I\}$ *będzie rodziną homomorfizmów modułów. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm* $\phi : \sum_{i\in I} M_i \to N$ *taki, że*

$$\phi \circ \iota_i = \phi_i,$$

dla $i \in I$. *Innymi słowy, następujący diagram jest przemienny:*

$$\begin{tikzcd} \sum_{i\in I} M_i \arrow[r, dashed, "\phi"] & N \\ M_i \arrow[u, "\iota_i"] \arrow[ur, "\phi_i"'] & \end{tikzcd}$$

Ponadto jeśli moduł M *ma powyższą własność, to wówczas* $M \cong \sum_{i\in I} M_i$.

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup i pozostawiamy go czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.