3. Wykład 3: Ciągi dokładne.

Definicja 3.1. *Niech R będzie pierścieniem. Ciąg lewych R-modułów i homomorfizmów:*

$$\ldots \to M_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} M_i \xrightarrow{g_i} M_{i+1} \to \ldots$$

nazywamy **ciągiem dokładnym w członie** M_i*, jeśli* $\operatorname{im} g_{i-1} = \ker g_i$*. Ciąg nazywamy* **ciągiem dokładnym,** *gdy jest dokładny w każdym członie.*

Uwaga 3.1. *Niech R będzie pierścieniem, M_1, M_2, M_3 lewymi R-modułami. Wowczas:*

(1) $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2$ *jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy f jest różnowartościowy;*
(2) $M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ *jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy g jest surjektywny;*
(3) $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ *jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy f jest różnowartościowy, g jest surjektywny i* $\ker g = \operatorname{im} f$*, przy czym ostatni warunek można zastąpić warunkiem orzekającym, że g indukuje izomorfizm $M_2/\operatorname{im} f \cong M_3$.*

Uwaga 3.2. *Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R-modułami. Wówczas $Hom_R(M, N)$ jest grupą przemienną.*

Twierdzenie 3.1. *Niech R będzie pierścieniem.*

(1) *Ciąg lewych R-modułów i homomorfizmów*

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$$

jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego lewego R-modułu N ciąg:

$$0 \to Hom_R(M_3, N) \xrightarrow{\overline{g}} Hom_R(M_2, N) \xrightarrow{\overline{f}} Hom_R(M_1, N)$$

jest ciągiem dokładnym grup abelowych, gdzie odwzorowania $\overline{g} : Hom_R(M_3, N) \to Hom_R(M_2, N)$ i $\overline{f} : Hom_R(M_2, N) \to Hom_R(M_1, N)$ dane są wzorami

$$\overline{g}(\phi) = \phi \circ g \text{ oraz } \overline{f}(\psi) = \psi \circ f.$$

(2) *Ciąg lewych R-modułów i homomorfizmów*

$$0 \to N_1 \xrightarrow{f} N_2 \xrightarrow{g} N_3$$

jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego lewego R-modułu M ciąg:

$$Hom_R(M, N_1) \xrightarrow{\overline{f}} Hom_R(M, N_2) \xrightarrow{\overline{g}} Hom_R(M, N_3) \to 0$$

jest ciągiem dokładnym grup abelowych, gdzie odwzorowania $\overline{f} : Hom_R(M, N_1) \to Hom_R(M, N_2)$ i $\overline{g} : Hom_R(M, N_2) \to Hom_R(M, N_3)$ dane są wzorami

$$\overline{f}(\phi) = f \circ \phi \text{ oraz } \overline{g}(\psi) = g \circ \psi.$$

Dowód. (1) ($\Rightarrow$): Jeżeli ciąg $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ jest dokładny, to g jest surjektywny oraz $\operatorname{im} f = \ker g$. Ustalmy lewy R-moduł N.

Pokażemy, że $\overline{g}$ jest różnowartościowy. Załóżmy, że dla pewnych $\phi_1, \phi_2 \in Hom_R(M_3, N)$ zachodzi $\overline{g}(\phi_1) = \overline{g}(\phi_2)$. Wówczas

$$\phi_1 \circ g = \phi_2 \circ g.$$

Ponieważ g jest surjektywny, a więc jest epimorfizmem kategoryjnym, więc $\phi_1 = \phi_2$.

Pokażemy, że $\operatorname{im}\overline{g} = \ker\overline{f}$. Dla dowodu inkluzji ($\subset$) ustalmy $\psi \in \operatorname{im}\overline{g}$. Wówczas $\psi = \overline{g}(\phi) = \phi \circ g$ dla pewnego $\phi \in Hom_R(M_3, N)$. Wówczas $\overline{f}(\psi)(m_1) = \overline{f}(\phi \circ g)(m_1) = \phi \circ g \circ f(m_1) = \phi(0) = 0$, dla dowolnego $m_1 \in M_1$, zatem $\psi \in \ker\overline{f}$.

Dla dowodu inkluzji ($\supset$) ustalmy $\psi \in \ker\overline{f}$. Wówczas $\psi : M_2 \to N$ jest takim homomorfizmem, że $\overline{f}(\psi) = \psi \circ f = 0$. Zatem $\psi(m_2) = 0$ dla $m_2 \in \operatorname{im} f$, więc $\operatorname{im} f \subset \ker\psi$. Wobec Wniosku 2.3 istnieje dokładnie jeden homomorfizm $u : M_2/\operatorname{im} f \to N$ taki, że $\psi = u \circ \kappa$, gdzie $\kappa : M_2 \to M_2/\operatorname{im} f$ jest homomorfizmem kanonicznym:

$$\begin{tikzcd} & M_2 \arrow[dl, "\kappa"', "{"na"}"] \arrow[dr, "\psi"] & \\ M_2/\operatorname{im} f \arrow[rr, dashed, "u"'] & & N \end{tikzcd}$$

Podobnie, ponieważ $g : M_2 \to M_3$ jest surjekcją oraz $\ker g = \operatorname{im} f$, więc jedyny homomorfizm $v : M_2/\ker g = M_2/\operatorname{im} f \to M_3$ taki, że $g = v \circ \kappa$ jest izomorfizmem:

$$\begin{tikzcd} & M_2 \arrow[dl, "\kappa"', "{"na"}"] \arrow[dr, "g"] & \\ M_2/\operatorname{im} f \arrow[rr, dashed, "v"'] & & M_3 \end{tikzcd}$$

W szczególności v jest odwracalny, więc $\kappa = v^{-1} \circ g$. Stąd $\psi = u \circ \kappa = u \circ v^{-1} \circ g = \overline{g}(u \circ v^{-1}) \in \operatorname{im}\overline{g}$.

($\Leftarrow$:) Jeżeli $0 \to Hom_R(M_3, N) \xrightarrow{\overline{g}} Hom_R(M_2, N) \xrightarrow{\overline{f}} Hom_R(M_1, N)$ jest ciągiem dokładnym grup abelowych dla wszystkich N, to $\overline{g}$ jest różnowartościowy oraz $\operatorname{im}\overline{g} = \ker\overline{f}$.

Pokażemy, że g jest surjektywny. Ponieważ $\overline{g}$ jest różnowartościowy, więc jeśli $\phi_1, \phi_2 \in Hom_R(M_2, N)$ są takimi homomorfizmami, że $\phi_1 \circ g = \phi_2 \circ g$, to $\phi_1 = \phi_2$. Zatem g jest epimorfizmem kategoryjnym, a więc surjekcją.

Pokażemy, że $\operatorname{im} f = \ker g$. Dla dowodu inkluzji ($\subset$) weźmy w założeniu $N = M_3$. Ponieważ $\operatorname{im}\overline{g} = \ker\overline{f}$, więc dla $\phi \in Hom_R(M_3, M_3)$ zachodzi $\overline{f}(\overline{g}(\phi)) = 0$, czyli $\phi \circ g \circ f = 0$. W szczególności $id_G \circ g \circ f = g \circ f = 0$, więc $\operatorname{im} f \subset \ker g$.

Dla dowodu inkluzji ($\supset$) weźmy w założeniu $N = M_2/\operatorname{im} f$ i niech $\kappa : M_2 \to M_2/\operatorname{im} f$ będzie epimorfizmem kanonicznym. Wówczas $\overline{f}(\kappa)(m_2) = (\kappa \circ f)(m_2) = f(m_2) + \operatorname{im} f = \operatorname{im} f$, więc $\kappa \in \ker\overline{f} = \operatorname{im}\overline{g}$. Zatem dla pewnego $\phi \in Hom_R(M_3, M_2/\operatorname{im} f)$ zachodzi $\kappa = \phi \circ g$. Stąd $\operatorname{im} f = \ker\kappa \supset g$.

(2) analogicznie.

$\square$

Twierdzenie 3.2. *Niech R będzie pierścieniem.*

(1) *Jeżeli w diagramie przemiennym*

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & M_3 \arrow[r] & 0 \\ N_1 \arrow[r, "f'"] & N_2 \arrow[r, "g'"] & N_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

wiersze są ciągami dokładnymi, to istnieje dokładnie jeden homomorfizm $w : M_3 \to N_3$ taki, że diagram

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\ N_1 \arrow[r, "f'"] & N_2 \arrow[r, "g'"] & N_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

jest przemienny.

(2) *Jeżeli w diagramie przemiennym*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"] & M_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & M_3 \arrow[d, "w"] \\ 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "f'"] & N_2 \arrow[r, "g'"] & N_3 \end{tikzcd}$$

wiersze są ciągami dokładnymi, to istnieje dokładnie jeden homomorfizm $u : M_1 \to N_1$ taki, że diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & M_3 \arrow[d, "w"] \\ 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "f'"] & N_2 \arrow[r, "g'"] & N_3 \end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Dowód. (1) Rozważmy diagram

$$\begin{tikzcd} & M_2 \arrow[dl, "g"', "\text{"na"}"] \arrow[dr, "g'\circ v"] & \\ M_3 & & N_3 \end{tikzcd}$$

Pokażemy, że $\ker g \subset \ker g' \circ v$. Istotnie, ustalmy $m_2 \in \ker g = \operatorname{im} f$. Wówczas $m_2 = f(m_1)$. Zatem $v(m_2) = v(f(m_1)) = f'(u(m_1))$. Stąd $g' \circ v(m_2) = g' \circ f'(u(m_1)) = 0$.

Wobec Twierdzenia 2.4 istnieje dokładnie jeden homomorfizm $w : M_3 \to N_3$ taki, że $w \circ g = g' \circ v$.

(2) analogicznie

□

Twierdzenie 3.3 (lemat o pięciu modułach)**.** *Niech R będzie pierścieniem, niech w diagramie przemiennym*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "f'"] & N_2 \arrow[r, "g'"] & N_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

wiersze będą ciągami dokładnymi. Wówczas:

(1) *Jeśli u i w są różnowartościowe, to v jest różnowartościowy.*
(2) *Jeśli u i w są surjekcjami, to v jest surjekcją.*
(3) *Jeśli u i w są izomorfizmami, to v jest izomorfizmem.*

Dowód. (1) Ustalmy $m_2 \in M_2$ i niech $v(m_2) = 0$. Wówczas

$$w \circ g(m_2) = g' \circ v(m_2) = g'(0) = 0.$$

Ponieważ w jest różnowartościowe, $g(m_2) = 0$. Ponieważ $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ jest dokładny, więc $\ker g = \operatorname{im} f$, a zatem $m_2 = f(m_1)$ dla pewnego $m_1 \in M_1$. Stąd

$$f' \circ u(m_1) = v \circ f(m_1) = v(m_2) = 0.$$

Ponieważ $0 \to N_1 \xrightarrow{f'} N_2 \xrightarrow{g'} N_3 \to 0$ jest dokładny, więc f' jest różnowartościowy, więc $u(m_1) = 0$. Ponieważ u jest różnowartościowy, $m_1 = 0$. Stąd $m_2 = f(m_1) = f(0) = 0$.

(2) analogicznie.

(3) wynika wprost z (1) i (2).

$\square$

Definicja 3.2. *Niech R będzie pierścieniem, niech M, N będą lewymi R-modułami, niech $\phi : M \to N$ będzie homomorfizmem modułów. Moduł $N/\operatorname{im}\phi$ nazywamy* **kojądrem** *homomorfizmu ϕ i oznaczamy* $\operatorname{coker}\phi$.

Twierdzenie 3.4 (lemat o wężu)**.** *Niech R będzie pierścieniem, niech w diagramie przemiennym*

$$\begin{tikzcd}
& M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "f'"] & N_2 \arrow[r, "g'"] & N_3 &
\end{tikzcd}$$

wiersze będą ciągami dokładnymi. Wówczas ciąg

$$0 \to \ker u \xrightarrow{f''} \ker v \xrightarrow{g''} \ker w \xrightarrow{d} \operatorname{coker} u \xrightarrow{\overline{f'}} \operatorname{coker} v \xrightarrow{\overline{g'}} \operatorname{coker} w \to 0$$

jest dokładny, gdzie $f'' = f \restriction_{\ker u}$, $g'' = g \restriction_{\ker v}$ oraz $\overline{f'}(n_1 + \operatorname{im} u) = f'(n_1) + \operatorname{im} v$, $\overline{g'}(n_2 + \operatorname{im} v) = g'(n_2) + \operatorname{im} w$, a d jest pewnym "homomorfizmem łączącym".

Wyjaśnienie nazwy "lemat o wężu" pochodzi od następującego diagramu:

$$\begin{tikzcd}
& \ker u \arrow[r, "f''"] \arrow[d] & \ker v \arrow[r, "g''"] \arrow[d] & \ker w \arrow[d] \arrow[dddll, "d"] & \\
& M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & N_2 \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & N_3 \arrow[d] & \\
& \operatorname{coker} u \arrow[r, "\overline{f'}"] & \operatorname{coker} v \arrow[r, "\overline{g'}"] & \operatorname{coker} w &
\end{tikzcd}$$

Dowód. Ograniczymy się do zbudowania i sprawdzenia poprawności określenia homomorfizmu łączącego, zweryfikowanie, iż $f'', g'', \overline{f'}$ i $\overline{g'}$ są dobrze zdefiniowanymi odwzorowaniami, jak również pokazanie, że stosowny ciąg jest dokładny pozostawiamy Czytelnikowi jako nietrudnie, acz dość techniczne ćwiczenie.

Ponieważ $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ jest dokładny, więc g jest surjekcją. Tym samym dla ustalonego $m_3 \in \ker w$, istnieje $m_2 \in M_2$ takie, że $m_3 = g(m_2)$. Ponieważ $w \circ g = g' \circ v$, więc $g' \circ v(m_2) = w \circ g(m_2) = 0$, a zatem $v(m_2) \in \ker g' = \operatorname{im} f'$. Wobec tego $v(m_2) = f'(n_1)$, dla pewnego $n_1 \in N_1$. Zdefiniujmy odwzorowanie $d : \ker w \to \operatorname{coker} u = N_1/\operatorname{im} u$ wzorem

$$d(m_3) = n_3 + \operatorname{im} u.$$

Pokażemy, że d jest dobrze określone. Załóżmy bowiem, że $m_3 = g(m_2) = g(m_2')$ dla pewnych $m_2, m_2' \in M_2$. Wówczas $m_2 - m_2' \in \ker g = \operatorname{im} f$, a więc $m_2 - m_2' = f(m_1)$ dla pewnego $m_1 \in M_1$. Stąd, jeśli $v(m_2) = f'(n_1)$ i $v(m_2') = f'(n_1')$, to

$$f'(n_1) - f'(n_1') = v(m_2) - v(m_2') = v(m_2 - m_2') = v(f(m_1) = f'(u(m_1)).$$

Skoro f' jest różnowartościowe, to $n_1 - n_1' = u(m_1)$, a więc $n_1 + \operatorname{im} u = n_1' + \operatorname{im} u$. □

Definicja 3.3. *Niech R będzie pierścieniem, $\mathcal{S}$ klasą lewych R-modułów, G grupą abelową. Funkcję $\lambda : \mathcal{S} \to G$ nazywamy* **addytywną,** *gdy dla każdego ciągu dokładnego $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$, $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{S}$ zachodzi*

$$\lambda(M_1) - \lambda(M_2) + \lambda(M_3) = 0$$

Przykład:

(1) Niech F będzie ciałem, $\mathcal{S}$ klasą skończeniewymiarowych przestrzeni liniowych nad ciałem F. Wówczas funkcja $\lambda : \mathcal{S} \to \mathbb{Z}$ dana wzorem

$$\lambda(V) = \dim V$$

jest funkcją addytywną.

Uwaga 3.3. *Niech R będzie pierścieniem, niech*

$$\ldots \to M_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} M_i \xrightarrow{g_i} M_{i+1} \to \ldots$$

będzie ciągiem dokładnym, niech $\mathcal{S}$ będzie klasą lewych R-modułów zawierającą wszystkie moduły M_i, $\ker g_i$ *i* $\operatorname{im} g_i$, *dla $i \in \mathbb{Z}$, niech G będzie grupą przemienną, a $\lambda : \mathcal{S} \to G$ funkcją addytywną. Wówczas*

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \lambda(M_i) = 0.$$

Dowód. Podzielmy ciąg $\ldots \to M_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} M_i \xrightarrow{g_i} M_{i+1} \to \ldots$ na ciągi:

$$0 \to \ker g_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} M_i \xrightarrow{g_i} \operatorname{im} g_i \to 0.$$

Wówczas $\lambda(M_i) = \lambda(\ker g_{i-1}) + \lambda(\operatorname{im} g_i)$. Sumując znakozmiennie otrzymujemy 0. □