2. Wykład 2: Homomorfizmy modułów. Moduł ilorazowy, twierdzenie o homomorfizmie.

Definicja 2.1. *Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R-modułami.*

(1) *Odwzorowanie $\phi : M \to N$ nazywamy* **homomorfizmem**, *jeśli:*
 - $\forall m_1, m_2 \in M[\phi(m_1 + m_2) = \phi(m_1) + \phi(m_2)]$,
 - $\forall a \in R \forall m \in M[\phi(am) = a\phi(m)]$.

 Zbiór wszystkich homomorfizmów modułu M w N oznaczamy $Hom_R(M, N)$.

(2) *Homomorfizm $\phi : M \to N$ nazywamy* **monomorfizmem kategoryjnym modułów,** *jeśli dla dowolnych lewego R-modułu K i homomorfizmów $\psi_1, \psi_2 : K \to M$:*

$$\text{jeśli } \phi \circ \psi_1 = \phi \circ \psi_2 \text{ to } \psi_1 = \psi_2.$$

(3) *Homomorfizm $\phi : M \to N$ nazywamy* **epimorfizmem kategoryjnym modułów,** *jeśli dla dowolnych lewego R-modułu K i homomorfizmów $\psi_1, \psi_2 : N \to K$:*

$$\text{jeśli } \psi_1 \circ \phi = \psi_2 \circ \phi \text{ to } \psi_1 = \psi_2.$$

(4) *Homomorfizm $\phi : M \to N$ nazywamy* **izomorfizmem,** *jeśli jest różnowartościowy i surjektywny. Dwa moduły M i N nazywamy* **izomorficznymi,** *jeśli istnieje między nimi izomorfizm, co oznaczamy przez $M \cong N$.*

(5) *Jeśli $\phi : M \to N$ jest homomorfizmem, to zbiór $\phi^{-1}(0_N)$ nazywamy* **jądrem** *i oznaczamy* $\ker \phi$, *a zbiór $\phi(M)$* **obrazem** *i oznaczamy* $\operatorname{im} \phi$.

Przykłady:

(1) Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem F, $\phi : V \to W$ przekształceniem liniowym. Wówczas ϕ jest homomorfizmem modułów.

(2) Niech A, B będą grupami abelowymi, $\phi : A \to B$ homomorfizmem grup. Wówczas ϕ jest homomorfizmem modułów.

(3) Niech M, N będą lewymi R-modułami, $\phi : M \to N$ niech będzie dane wzorem $\phi(m) = 0_N$. Wówczas ϕ jest homomorfizmem modułów, nazywamy go **homomorfizmem zerowym.**

Twierdzenie 2.1. *Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R-modułami, $\phi : M \to N$ homomorfizmem modułów. Wówczas:*

(1) $\ker \phi < M$, $\operatorname{im} \phi < N$;

(2) *ϕ jest homomorfizmem różnowartościowym wtedy i tylko wtedy, gdy* $\ker \phi = \{0_M\}$;

(3) *ϕ jest homomorfizmem surjektywnym wtedy i tylko wtedy, gdy* $\operatorname{im} \phi = N$;

(4) *ϕ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje homomorfizm $\psi : N \to M$ taki, że*

$$\phi \circ \psi = id_N \text{ oraz } \psi \circ \phi = id_M;$$

(5) *ϕ jest homomorfizmem różnowartościowym wtedy i tylko wtedy, gdy jest monomorfizmem kategoryjnym modułów;*

(6) *ϕ jest homomorfizmem surjektywnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest epimorfizmem kategoryjnym modułów.*

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Twierdzenie 2.2. *Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R-modułami, $\phi : M \to N$ homomorfizmem modułów, niech $M_1 < M$, $N_1 < N$. Wówczas:*

(1) $\phi(M_1) < N$;
(2) $\phi^{-1}(N_1) < M$.

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Twierdzenie 2.3 (lemat o odpowiedniości między podmodułami)**.** *Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R-modułami, $\pi : M \to N$ homomorfizmem surjektywnym modułów i niech $K = \ker \pi$. Oznaczmy*

$$\mathcal{M} = \{M_1 : M_1 < M \text{ oraz } K \subset M_1\}, \mathcal{N} = \{N_1 : N_1 < N\}.$$

Wówczas odwzorowania

$$\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}, \phi(M_1) = \pi(M_1),$$
$$\psi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}, \psi(N_1) = \pi^{-1}(N)1)$$

są wzajemnie odwrotne.

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Definicja 2.2. *Niech R będzie pierścieniem, $M_1, \ldots, M_n, N$ lewymi R-modułami. Odwzorowanie $\phi : M_1 \times \ldots \times M_n \to N$ nazywamy* **homomorfizmem n-liniowym,** *jeśli dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$:*

(1) *dla $m_1 \in M_1, \ldots, m_i, m_i' \in M_i, \ldots, m_n \in M_n$:*

$$\begin{aligned} &\phi(m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i + m_i', m_{i+1}, \ldots, m_n) \\ &= \phi(m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, \ldots, m_n) + \phi(m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i', m_{i+1}, \ldots, m_n), \end{aligned}$$

(2) *dla $m_1 \in M_1, \ldots, m_n \in M_n$ oraz $a \in R$:*

$$\phi(m_1, \ldots, m_{i-1}, am_i, m_{i+1}, \ldots, m_n) = a\phi(m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, \ldots, m_n).$$

Definicja i uwaga 2.1. *Niech R będzie pierścieniem, M lewym R-modułem, $N < M$. Oznaczmy*

$$m + N = \{m + n : n \in N\},$$

$$M/N = \{m + N : m \in M\}$$

i w zbiorze M/N określmy działania dodowania i mnożenia zewnętrznego:

$$(m_1 + N) + (m_2 + N) = (m_1 + m_2) + N,$$

$$a(m + N) = am + N.$$

Wówczas M/N jest lewym R-modułem, nazywamy go **modułem ilorazowym** *M względem N.*

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Przykłady:

(4) Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem F, niech $W < V$. Wówczas przestrzeń ilorazowa V/W jest modułem ilorazowym.
(5) Niech A będzie grupą abelową, niech $B < A$. Wówczas grupa ilorazowa A/B jest modułem ilorazowym.
(6) Niech R będzie pierścieniem, niech $I \lhd R$. Wówczas pierścień ilorazowy R/I jest modułem ilorazowym.

Definicja i uwaga 2.2. *Niech R będzie pierścieniem, M lewym R-modułem, $N < M$. Wówczas odwzorowanie $\kappa : M \to M/N$ dane wzorem $\kappa(m) = m+N$ jest homomorfizmem surjektywnym oraz* $\ker \kappa = N$. *Nazywamy go* **epimorfizmem kanonicznym.**

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Wniosek 2.1. *Niech R będzie pierścieniem, M lewym R-modułem, $N \subset M$. Wówczas $N < M$ wtedy i tylko wtedy, gdy N jest jądrem pewnego homomorfizmu.*

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Twierdzenie 2.4 (o homomorfizmie)**.** *Niech R będzie pierścieniem, M, N_1, N_2 lewymi R-modułami, $\phi_1 : M \to N_1$ homomorfizmem surjektywnym, $\phi_2 : M \to N_2$ homomorfizmem.*

(1) *Jeśli istnieje homomorfizm $\psi : N_1 \to N_2$ taki, że $\psi \circ \phi_1 = \phi_2$, to* $\ker \phi_1 \subset \ker \phi_2$.
(2) *Jeśli* $\ker \phi_1 \subset \ker \phi_2$, *to istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\psi : N_1 \to N_2$ taki, że $\psi \circ \phi_1 = \phi_2$. Ponadto wówczas* $\operatorname{im} \psi = \operatorname{im} \phi_2$ *oraz* $\ker \psi = \phi_1(\ker \phi_2)$.
Inaczej: diagram

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\phi_1"', "\text{''na''}"] \arrow[dr, "\phi_2"] & \\ N_1 \arrow[rr, dashed, "\psi"'] & & N_2 \end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Wniosek 2.2. *Niech R będzie pierścieniem, M, N_1, N_2 lewymi R-modułami, $\phi_1 : M \to N_1$ homomorfizmem surjektywnym, $\phi_2 : M \to N_2$ homomorfizmem. Niech ponadto* $\ker \phi_1 \subset \ker \phi_2$. *Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\psi : N_1 \to N_2$ taki, że $\psi \circ \phi_1 = \phi_2$ oraz:*

(1) *jeśli ϕ_2 jest surjektywny, to ψ jest surjektywny;*
(2) *jeśli* $\ker \phi_1 = \ker \phi_2$, *to ψ jest różnowartościowy;*
(3) *jeśli ϕ_2 jest surjektywny i* $\ker \phi_1 = \ker \phi_2$, *to ψ jest izomorfizmem.*

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Wniosek 2.3 (twierdzenie o homomorfizmie dla modułów ilorazowych)**.** *Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R-modułami, $K < M$, $\phi : M \to N$ homomorfizmem.*

(1) *Jeśli istnieje homomorfizm $\psi : M/K \to N$ taki, że $\psi \circ \kappa = \phi$ (gdzie $\kappa : M \to M/N$ oznacza epimorfizm kanoniczny), to* $K \subset \ker \phi$.
(2) *Jeśli* $K \subset \ker \phi$, *to istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\psi : M/K \to N$ taki, że $\psi \circ \kappa = \phi$. Ponadto wówczas* $\operatorname{im} \psi = \operatorname{im} \phi$ *oraz* $\ker \psi = \kappa(\ker \phi)$.
Inaczej: diagram

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\kappa"', "\text{''na''}"] \arrow[dr, "\phi"] & \\ M/K \arrow[rr, dashed, "\psi"'] & & N \end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Wniosek 2.4. *Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R-modułami, $K < M$, $\phi : M \to N$ homomorfizmem. Niech ponadto $K \subset \ker \phi$. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\psi : M/K \to N$ taki, że $\psi \circ \kappa = \phi$ (gdzie $\kappa : M \to M/N$ oznacza epimorfizm kanoniczny) oraz*

(1) *jeśli ϕ jest surjektywny, to ψ jest surjektywny;*
(2) *jeśli $K = \ker \phi$, to ψ jest różnowartościowy;*
(3) *jeśli ϕ jest surjektywny i $K = \ker \phi$, to ψ jest izomorfizmem.*

Twierdzenie 2.5 (I twierdzenie Noether-Dedekinda o izomorfizmie)**.** *Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R-modułami, $\phi : M \to N$ homomorfizmem. Wówczas*

$$\operatorname{im} \phi \cong M/\ker \phi.$$

Twierdzenie 2.6 (II twierdzenie Noether-Dedekinda o izomorfizmie)**.** *Niech R będzie pierścieniem, M lewym R-modułem, $N_1, N_2 < M$. Wówczas*

$$N_1/N_1 \cap N_2 \cong (N_1 + N_2)/N_2.$$

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Twierdzenie 2.7 (II twierdzenie Noether-Dedekinda o izomorfizmie)**.** *Niech R będzie pierścieniem, M lewym R-modułem, $N_1, N_2 < M$, $N_1 \subset N_2$. Wówczas*

$$M/N_2 \cong (M/N_1)/(N_2/N_1).$$

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Twierdzenie 2.8 (o klasyfikacji unitarnych modułów cyklicznych)**.** *Niech R będzie pierścieniem z jedynką, M lewym unitarnym R-modułem cyklicznym. Wówczas $M \cong R/I$, gdzie $I \lhd R$ jest pewnym ideałem lewostronnym.*

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla grup, w związku z czym pozostawiamy go Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.