

1. INDUKCJA

Zadanie 1. Zdefiniować par oraz npar niezależnie od siebie.

Zadanie 2. Zapisać definicje paren , mparen i lparen przy użyciu osądów i reguł wnioskowania.

Zadanie 3. Czy reguła $\frac{n \text{ par}}{s \text{ } s \text{ } n \text{ par}} \text{Succ}E^2$ jest wyprowadzalna, czy dopuszczalna? A reguła $\frac{s \text{ } s \text{ } n \text{ par}}{n \text{ par}} \text{Succ}E^{-2}$?

Zadanie 4. Udowodnić następujący lemat z zastosowaniem zasady indukcji reguł dla osądu s' lparen .

Lemat 1. Jeżeli s lparen oraz s' lparen , to wówczas ss' lparen .

Zadanie 5. Przepisać reguły wnioskowania dla osądu $k \triangleright s$ tak, aby wygodniej było go czytać w kierunku od przesłanek do wniosków.

Zadanie 6. Rozważmy reprezentację binarną liczb naturalnych. Zdefiniować kategorię syntaktyczną bin liczb naturalnych bez zera. Następnie zdefiniować funkcję num , która dany ciąg b z kategorii bin przekształca na liczbę zapisaną w systemie dziesiętnym, na przykład $\text{num}(\mathbf{10}) = 2$.

Zadanie 7. Udowodnić, że jeśli s lparen to s mparen .

Zadanie 8. Dla danego osądu t tree definiujemy funkcje $\text{numLeaf}(t)$ oraz $\text{numNode}(t)$ obliczające liczbę liści i węzłów, odpowiednio:

$$\begin{aligned} \text{numLeaf}(\text{leaf } n) &= 1 \\ \text{numLeaf}(\text{node } (t_1, n, t_2)) &= \text{numLeaf}(t_1) + \text{numLeaf}(t_2) \\ \text{numNode}(\text{leaf } n) &= 0 \\ \text{numNode}(\text{node } (t_1, n, t_2)) &= \text{numNode}(t_1) + \text{numNode}(t_2) + 1 \end{aligned}$$

Udowodnić za pomocą metody indukcji reguł, że jeśli t tree to wówczas $\text{numLeaf}(t) - \text{numNode}(t) = 1$.

Zadanie 9. Udowodnić następujący lemat:

Lemat 2. Jeżeli $\underbrace{((\dots(s \text{ lparen}))_k}_{k}$ to wówczas $\underbrace{((\dots())_k)s \text{ lparen}}_k$.

Zadanie 10. Wykorzystać Lemat 2 do dowodu następującego lematu:

Lemat 3. Jeżeli $\underbrace{((\dots(s \text{ mparen}))_k}_{k}$ to wówczas $\underbrace{((\dots())_k)s \text{ lparen}}_{(}$.

Zadanie 11. Udowodnić, że jeśli s mparen to wówczas $0 \triangleright s$.

Zadanie 12. Rozważmy następujące reguły wnioskowania porównujące dwie liczby naturalne:

$$\frac{}{0 = 0} \text{EqZero} \qquad \frac{n = m}{s n = s m} \text{EqSucc}$$

Udowodnić, że następująca reguła wnioskowania jest dopuszczalna:

$$\frac{n = m \quad n \text{ double } n' \quad m \text{ double } m'}{n' = m'} \text{EqDouble}$$

Zadanie 13. Rozważmy następującą definicję indukcyjną ciągów odpowiadających sobie nawiasów z użyciem nowego osądu s tparen :

$$\frac{}{\epsilon \text{ tparen}} T_{\text{eps}} \qquad \frac{s_1 \text{ tparen } s_2 \text{ tparen}}{s_1(s_2) \text{ tparen}} T_{\text{seq}}$$

Udowodnić następujący lemat:

Lemat 4. *Jeśli s tparen oraz s' tparen, to wówczas ss' tparen.*

Zadanie 14. *Wykorzystać Lemat 4 do dowodu następującego lematu:*

Lemat 5. *Jeżeli s mparen, to wówczas s tparen.*

Zadanie 15. *Wykorzystać indukcję reguł względem osądu s lparen do dowodu następującego lematu:*

Lemat 6. *Jeżeli s lparen, to wówczas s tparen.*

2. RACHUNEK λ .

Zadanie 16. *Czy można udowodnić, że $\lambda x.e \equiv_\alpha \lambda y.e'$, jeśli $x \neq y$ oraz $y \in FV(e)$?*

Zadanie 17. *Założmy, że $x \notin FV(e)$ oraz $y \notin FV(e)$. Udowodnij, że $e \equiv_\alpha [x \leftrightarrow y]e$.*

Zadanie 18. *Zdefiniować reguły redukcyjne dla **dziwacznej** strategii redukcyjnej danej następująco:*

- dla danej aplikacji $e_1 e_2$ najpierw redukujemy e_2 ;
- po zredukowaniu e_2 do wartości redukujemy e_1 ;
- jeśli e_1 redukuje się do λ -abstrakcji, stosujemy β -redukcję.

Zadanie 19. *Zdefiniować funkcję $\text{double} = \lambda n.\dots$ podwajającą daną liczbę naturalną zakodowaną jako liczebnik Churcha.*

Zadanie 20. *Zdefiniować funkcję $\text{halve} = \lambda n.\dots$ obliczającą część całkowitą z połowy danej liczby naturalnej zakodowanej jako liczebnik Churcha.*

3. RACHUNEK λ Z TYPAMI PROSTYMI.

Zadanie 21. *Wykorzystać indukcję reguł względem osądu $\Gamma \vdash e : A$ do dowodu twierdzenia o zachowaniu.*

Zadanie 22. *Udowodnić następujący lemat opisujący zasadę ściągania:*

Lemat 7. *Jeśli $\Gamma, x : A, x : A \vdash e : C$ to wówczas $\Gamma, x : A \vdash e : C$.*

4. LOGIKA ZDAŃ.

Zadanie 23. *Udowodnić następujące równoważności:*

- (L2) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (rozdzielność $\wedge$ względem $\vee$)
- (L4) $A \vee (B \vee C) \equiv A \vee (B \vee C)$ (łączność $\vee$)
- (L7) $A \rightarrow (B \wedge C) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$ (rozdzielność $\rightarrow$ względem $\wedge$)
- (L9) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \rightarrow C$
- (L10) $(A \vee B) \rightarrow C \equiv (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$

Zadanie 24. *Zdefiniuj przemenną konwersję dla spójnika $\perp$.*

Zadanie 25. *Udowodnić następujący lemat:*

Lemat 8. *Reguła $\frac{A \downarrow}{A \uparrow}$ jest wyprowadzalna.*