

Zestaw zadań 10: podstawowe pojęcia teorii podzielności, pierścienie z jednoznacznym rozkładem, pierścienie euklidesowe

- (1) Wykazać następujące własności relacji podzielności w pierścieniu całkowitym P :
 - (a) jeśli $a|b$ i $b|c$, to $a|c$;
 - (b) $a|b \iff ac|bc$;
 - (c) jeśli $a|b$ i $a|c$, to $a|bx + cy$,
gdzie $a, b, c \in P^*$, $x, y \in P$.
- (2) Sprawdzić, czy w pierścieniu P element a jest dzielnikiem elementu b , jeśli:
 - (a) $a = 1 + i$, $b = 5 + 2i$, $P = \mathbb{Z}[i]$;
 - (b) $a = 5 + 2\sqrt{2}$, $b = 6 - \sqrt{2}$, $P = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
- (3) W pierścieniu P znaleźć wszystkie dzielniki elementu a , jeśli:
 - (a) $a = 13 + 2\sqrt{-5}$, $P = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$;
 - (b) $a = 4 - 2i$, $P = \mathbb{Z}[\sqrt{i}]$;
 - (c) $a = X^4 - 1$, $P = \mathbb{R}[X]$.
- (4) W pierścieniu P wyznaczyć wszystkie elementy stowarzyszone z elementem a , jeśli:
 - (a) $a = 6$, $P = \mathbb{Z}$;
 - (b) $a = 1 - 8i$, $P = \mathbb{Z}[i]$;
 - (c) $a = X^3 + 4X^2 + 2$, $P = \mathbb{Z}_5[X]$;
 - (d) $a = 2 + 3\sqrt{-2}$, $P = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$;
 - (e) $a = X^2 + X - 1$, $P = \mathbb{Q}[X]$.
- (5) Załóżmy, że $a, b \in P^*$ są elementami stowarzyszonymi oraz $c \in P^*$. Wykazać, że:
 - (a) $a|c \iff b|c$,
 - (b) $c|a \iff c|b$,
 - (c) a jest elementem nierozkładalnym $\iff b$ jest elementem nierozkładalnym,
 - (d) a jest elementem pierwszym $\iff b$ jest elementem pierwszym.
- (6) Zbadać, czy element a jest elementem nierozkładalnym pierścienia P , jeśli:
 - (a) $a = 7 - i$, $P = \mathbb{Z}[i]$;
 - (b) $a = 1 + 6i$, $P = \mathbb{Z}[i]$;
 - (c) $a = X^2 + 1$, $P = \mathbb{Z}_3[X]$;
 - (d) $a = X + Y^2$, $P = \mathbb{R}[X, Y]$;
 - (e) $a = 2 + \sqrt{-5}$, $P = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$;
 - (f) $a = X^4 + 1$, $P = \mathbb{Z}[i][X]$;
 - (g) $a = X^3 + 1$, $P = \mathbb{R}[X]$.
- (7) Wykazać, że element a nie jest elementem pierwszym pierścienia P (sprawdzić, czy element ten jest nierozkładalny), jeśli:
 - (a) $a = 3$, $P = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$;
 - (b) $a = 3 + \sqrt{-7}$, $P = \mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.
- (8) Zbadać, czy element $\sqrt{-6}$ jest elementem pierwszym pierścienia $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$.
- (9) Wyznaczyć wszystkie rozkłady elementu a na czynniki nierozkładalne w pierścieniu P , gdy:
 - (a) $a = 6$, $P = \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$;
 - (b) $a = 27$, $P = \mathbb{Z}[\sqrt{-23}]$.
- (10) Zbadać, czy element a ma rozkład jednoznaczny na czynniki nierozkładalne pierścienia P , jeśli:
 - (a) $a = 10$, $P = \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$;
 - (b) $a = 16$, $P = \mathbb{Z}[\sqrt{-15}]$;
 - (c) $a = 5 + \sqrt{-3}$, $P = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

- (11) Podać wszystkie z dokładnością do stowarzyszenia elementy nierozkładalne pierścienia P oraz wykazać, że pierścień ten jest pierścieniem z jednoznacznym rozkładem, jeśli:
- (a) $P = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : NWD(m, n) = 1 \text{ i } 3 \nmid n\}$;
 - (b) $P = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : NWD(m, n) = 1, 2 \nmid m \text{ i } 5 \nmid n\}$;
 - (c) $P = \{\frac{f(X)}{g(X)} \in \mathbb{Q}(X) : NWD(f, g) = 1 \text{ i } g(0) \neq 0\}$.
- (12) Wiedząc, że pierścień P jest pierścieniem z jednoznacznym rozkładem obliczyć liczbę wszystkich dzielników elementu $a \in P$, gdzie:
- (a) $a = 180, P = \mathbb{Z}$;
 - (b) $a = 210 - 30i, P = \mathbb{Z}[i]$;
 - (c) $a = 60, P = \mathbb{Z}[i]$;
 - (d) $a = 120 + 60\sqrt{-2}, P = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$;
 - (e) $a = X^3 + 2X^2 + X, P = \mathbb{Z}_3[X]$.
- (13) Zbadać, czy w pierścieniu P istnieje największy wspólny dzielnik elementów a, b , jeśli:
- (a) $a = 2 + 16\sqrt{-6}, b = 8 + \sqrt{-6}, P = \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$;
 - (b) $a = 4, b = 2 - 2\sqrt{-3}, P = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$;
 - (c) $a = 7 - \sqrt{-5}, b = 16 + \sqrt{-5}, P = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$;
 - (d) $a = 6, b = 3 + 3\sqrt{-5}, P = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
- (14) Niech $\varphi : P \rightarrow R$ będzie izomorfizmem pierścieni. Wykazać, że jeśli $d \sim NWD(a, b)$, to $\varphi(d) \sim NWD(\varphi(a), \varphi(b))$.
- (15) Niech P będzie pierścieniem z jednoznacznym rozkładem oraz $a, b, c, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in P^*$. Wykazać, że:
- (a) jeśli $NWD(a, b) \sim 1$ i $NWD(a, c) \sim 1$, to $NWD(a, bc) \sim 1$;
 - (b) jeśli $NWD(a, b) \sim 1$ oraz $k, l \in \mathbb{N}$, to $NWD(a^k, b^l) \sim 1$;
 - (c) $NWD(ca, cb) \sim cNWD(a, b)$;
 - (d) jeśli $NWD(a, b) \sim 1$ oraz $a|bc$, to $a|c$;
 - (e) jeśli $NWD(a, b) \sim 1$ oraz $a|b^k c$, to $a|c$;
 - (f) jeśli $NWD(a, b) \sim 1$ oraz $a|c$ i $b|c$, to $ab|c$;
 - (g) $NWD(a, b) \sim NWD(a, b + ac)$;
 - (h) jeśli $NWD(a_1, \dots, a_n) \sim d$ oraz $a_i = db_i$ dla $i = 1, \dots, n$, to $NWD(b_1, \dots, b_n) \sim 1$;
 - (i) jeśli elementy $a_1, \dots, a_n$ są parami względnie pierwsze (tzn. $NWD(a_i, a_j) \sim 1$ dla każdych $i \neq j$), to $NWW(a_1, \dots, a_n) = a_1 \dots a_n$;
 - (j) $NWW(a, b) \cdot NWD(a, b) \sim ab$.
- (16) Niech P będzie pierścieniem z jednoznacznym rozkładem oraz $a_1, \dots, a_n \in P^*$. Definiujemy ciąg $(d_1, \dots, d_n)$ następująco: $d_1 = a_1$, oraz $d_{i+1} = NWD(d_i, a_{i+1})$, dla $i = 1, \dots, n-1$. Wykazać, że $d_n \sim NWD(a_1, \dots, a_n)$.
- (17) Wyznacz $NWD(374, 306, 357, 255)$.
- (18) Niech D będzie liczbą całkowitą bezkwadratową (tzn. niepodzielną przez kwadrat żadnej liczby pierwszej) oraz funkcja $N : \mathbb{Z}[\sqrt{D}] \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ określona będzie wzorem $N(a + b\sqrt{D}) = |a^2 - b^2 D|$. Wykazać, że:
- (a) $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$;
 - (b) $\alpha \in U(\mathbb{Z}[\sqrt{D}]) \iff N(\alpha) = 1$;
 - (c) jeśli $N(\alpha)$ jest liczbą pierwszą, to α jest elementem nierozkładalnym.
- (19) Korzystając z algorytmu Euklidesa w pierścieniu $\mathbb{Z}$ obliczyć NWD danej pary liczb, a następnie przedstawić otrzymaną liczbę w postaci kombinacji liniowej danych liczb o współczynnikach całkowitych.

- (a) 287 i 14,
 - (b) 213 i 94,
 - (c) 354 i 66,
 - (d) 827 i 131,
 - (e) 3211 i 7163,
 - (f) 871 i 3627,
 - (g) 2352 i 268,
 - (h) 15088 i 4554,
 - (i) 2159 i 221,
 - (j) 29049 i 2047,
 - (k) 13699 i 1349,
 - (l) 21567 i 5005.
- (20) Korzystając z algorytmu Euklidesa w pierścieniu $\mathbb{Z}$ obliczyć odwrotność danego elementu pierścienia $\mathbb{Z}_{1734}$:
- (a) 343,
 - (b) 185,
 - (c) 637,
 - (d) 1633.
- (21) Stosując algorytm Euklidesa do wielomianów f i g z pierścienia $\mathbb{Z}_7[x]$, obliczyć $NWD(f, g)$, a następnie wielomian $NWD(f, g)$ przedstawić w postaci $NWD(f, g) = hf + kg$, gdzie $h, k \in \mathbb{Z}_7[x]$:
- (a) $f = x^4 + 5x^3 + 2x + 6$, $g = x^3 + 4x^2 + 4x + 5$,
 - (b) $f = x^4 + x^2 + 6x + 3$, $g = x^4 + x^3 + 5x + 1$,
 - (c) $f = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 6$, $g = x^3 + 6x + 1$,
 - (d) $f = x^3 + x^2 + 6x + 4$, $g = x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 2$.
- (22) Korzystając z algorytmu Euklidesa w pierścieniu $\mathbb{Z}_5[x]$, obliczyć w $\mathbb{Z}_5[x]/(x^3 + x + 1)$ odwrotność danej warstwy:
- (a) $x^2 + 4x + 1 + (x^3 + x + 1)$,
 - (b) $2x^2 + 4x + 3 + (x^3 + x + 1)$,
 - (c) $4x^2 + 4x + 2 + (x^3 + x + 1)$,
 - (d) $4x^2 + 3x + 3 + (x^3 + x + 1)$.
- (23) Stosując algorytm Euklidesa w pierścieniu $\mathbb{Z}[i]$, obliczyć NWD danej pary liczb. (Wskazówka: Przyjąć, że $N(a + bi) = a^2 + b^2$).
- (a) $7 - i$ oraz $5 + 9i$,
 - (b) $5 + 5i$ oraz $13 + 3i$,
 - (c) $22 + 5i$ oraz $5 + 3i$.
- (24) Stosując algorytm Euklidesa w pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, obliczyć NWD danej pary liczb. (Wskazówka: Przyjąć, że $N(a + bi\sqrt{2}) = a^2 + 2b^2$).
- (a) $5 + i\sqrt{2}$ oraz 9 ,
 - (b) $5 + 6i\sqrt{2}$ oraz $4 - i\sqrt{2}$,
 - (c) $7 + 6i\sqrt{2}$ oraz $19 + 10i\sqrt{2}$,
 - (d) $6 - 15i\sqrt{2}$ oraz $1 + 11i\sqrt{2}$.
- (25) Stosując algorytm Euklidesa w pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, obliczyć NWD danej pary liczb. (Wskazówka: Przyjąć, że $N(a + b\sqrt{3}) = a^2 - 3b^2$).
- (a) $7 + 5\sqrt{3}$ oraz $14 - 3\sqrt{3}$,
 - (b) $8 + \sqrt{3}$ oraz $6 - 3\sqrt{3}$,

- (c) $1 + 6\sqrt{3}$ oraz $4 + \sqrt{3}$.
- (26) Sprawdzić, że w pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ istnieje NWD liczb $6i\sqrt{5}$ oraz $6 + 3i\sqrt{5}$. Uwaga! Pierścień $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nie jest euklidesowy!