

Zestaw zadań 7: homomorfizmy pierścieni, ideały pierścieni, ideały generowane przez zbiory, pierścień ilorazowy, twierdzenie o homomorfizmie, ideały pierwsze i maksymalne.

- (1) Sprawdzić, czy $I \triangleleft P$, jeśli:
 - (a) $I = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $P = \mathbb{Z}_{12}$,
 - (b) $I = \{f \in \mathbb{R}^{\langle 0; 1 \rangle} : f(0) = f(1)\}$, $P = \mathbb{R}^{\langle 0; 1 \rangle}$,
 - (c) $I = C(\langle 0; 1 \rangle)$, $P = \mathbb{R}^{\langle 0; 1 \rangle}$,
 - (d) $I = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(1) = 0\}$.
- (2) Wykazać, że jeśli $\phi : P \rightarrow R$ jest homomorfizmem pierścieni oraz J jest ideałem w R , to $\phi^{-1}(J)$ jest ideałem pierścienia P .
- (3) Wykazać, że jeśli $P_1, \dots, P_n$ są pierścieniami oraz $I_k \triangleleft P_k$ dla $k = 1, \dots, n$, to $I_1 \times \dots \times I_n$ jest ideałem pierścienia $P_1 \times \dots \times P_n$.
- (4) Wyznaczyć wszystkie ideały pierścienia $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
- (5) Wykazać, że jeżeli $I \triangleleft P$ oraz $I[X] = \{a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in P[X] : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_0, \dots, a_n \in I\}$, to $I[X] \triangleleft P[X]$.
- (6) Wykaż, że pierścień $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ jest pierścieniem ideałów głównych.
- (7) Wykazać, że ideał I nie jest główny w pierścieniu P , jeśli :
 - (a) $I = (2, X)$, $P = \mathbb{Z}[X]$,
 - (b) $I = (X, Y)$, $P = \mathbb{R}[X, Y]$.
- (8) Wyznaczyć warstwy pierścienia P względem ideału I oraz utworzyć tabelki działań w pierścieniu ilorazowym P/I , jeśli :
 - (a) $P = \mathbb{Z}_{15}$, $I = (3)$,
 - (b) $P = \mathbb{Z}_{12}$, $I = (4)$,
 - (c) $P = \mathbb{Z}_2[X]$, $I = (X^2)$,
 - (d) $P = \mathbb{Z}_2[X]$, $I = (X^2 + X + 1)$.
- (9) Obliczyć liczbę elementów pierścienia ilorazowego $\mathbb{Z}_5[X]/(X^2)$.
- (10) W pierścieniu ilorazowym $\mathbb{Z}[X]/I$, gdzie $I = (X^3)$ rozwiązać równanie z niewiadomą t :
 - (a) $(X + I)t = I$,
 - (b) $((1 + 2X - 4X^2) + I)t = (2 + 5X - x^2) + I$.
- (11) W pierścieniu ilorazowym $\mathbb{Z}_5[X]/I$, gdzie $I = (X^3)$, wyznaczyć element odwrotny do elementu :
 - (a) $(1 + X) + I$,
 - (b) $(4 + 3X^2) + I$.
- (12) Zbadać, czy ideał I jest ideałem pierwszym lub maksymalnym w pierścieniu P , jeśli:
 - (a) $I = (X - 1)$, $P = \mathbb{Z}[X]$,
 - (b) $I = (X - 1)$, $P = \mathbb{R}[X]$,
 - (c) $I = (X - 1)$, $P = \mathbb{R}[X, Y]$,
 - (d) $I = (X^2 - 1)$, $P = \mathbb{Z}[X]$,
 - (e) $I = (X^2 + 1)$, $P = \mathbb{Q}[X]$,
 - (f) $I = (X + 1, Y)$, $P = \mathbb{Q}[X, Y]$,
 - (g) $I = (X + 1, Y)$, $P = \mathbb{Z}[X, Y]$,
 - (h) $I = (X^2 + 2)$, $P = \mathbb{Z}_5[X]$,
 - (i) $I = (5)$, $P = \mathbb{Z}$,
 - (j) $I = (X^2 - 2)$, $P = \mathbb{Z}_7[X]$.
- (13) Korzystając z twierdzenia o izomorfizmie pierścieni udowodnić następujące izomorfizmy pierścieni :
 - (a) $\mathbb{R}^2/I \cong \mathbb{R}$, gdzie $I = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$;

- (b) $\mathbb{R}[X]/I \cong \mathbb{R}$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ oraz $I = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(a) = 0\}$;
 - (c) $\mathbb{R}[X]/(X - a) \cong \mathbb{R}$, gdzie $a \in \mathbb{R}$;
 - (d) $\mathbb{R}[X, Y]/(Y) \cong \mathbb{R}[X]$;
 - (e) $\mathbb{Z}[X, Y]/(X, Y) \cong \mathbb{Z}$;
 - (f) $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \cong \mathbb{C}$;
 - (g) $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1) \cong \mathbb{Z}[i]$;
 - (h) $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - 2) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$;
 - (i) $\mathbb{R}[X]/(X^2 - X) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
 - (j) $\mathbb{Z}_7[X]/(X^2 + 5) \cong \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$.
- (14) Udowodnić, że :
- (a) każdy ideał pierwszy pierścienia skończonego jest maksymalny,
 - (b) w pierścieniu ideałów głównych każdy ideał pierwszy jest maksymalny.