

**Zestaw zadań 5: skończone grupy abelowe.**

- (1) (a) Niech  $B_1 < A_1$ ,  $B_2 < A_2$  będą podgrupami grupy abelowej  $A$  i  $A_1 \cap A_2 = \{0\}$ . Wykazać, że

$$(A_1 \oplus A_2)/(B_1 \oplus B_2) \cong A_1/B_1 \oplus A_2/B_2.$$

- (b) Niech  $B_1 < A_1, B_2 < A_2, \dots, B_n < A_n$  będą podgrupami grupy abelowej  $A$  i niech

$$A_i \cap (A_1 + \dots + A_{i-1} + A_{i+1} + \dots + A_n) = \{0\}$$

dla każdego  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Wykazać, że

$$\left( \bigoplus_{i=1}^n A_i \right) / \left( \bigoplus_{i=1}^n B_i \right) \cong \left( \bigoplus_{i=1}^n A_i/B_i \right).$$

- (2) Załóżmy, że  $A_1, \dots, A_k$  są podgrupami grupy abelowej  $A$  oraz  $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k$ . Udowodnić, że  $A \cong A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ .
- (3) Wykazać, że grupy  $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$  i  $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$  nie są izomorficzne (Wskazówka: funkcja  $f((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \prod_{n \in \mathbb{N}} p_n^{a_n}$ , gdzie  $p_n$  oznacza  $n$ -tą liczbę pierwszą, odwzorowuje różnowartościowo sumę prostą w zbiór  $\mathbb{N}$ ; funkcja  $g((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-na_n}$  odwzorowuje produkt na przedział  $[0, 1]$ ).
- (4) Niech  $A$  będzie skończoną grupą abelową oraz  $A = A_1 + A_2 + \dots + A_k$ . Wykazać, że jeśli  $a \in A$  oraz  $a = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ , gdzie  $a_i \in A_i$ , to  $r(a)$  jest dzielnikiem liczby  $NWW(r(a_1), r(a_2), \dots, r(a_k))$ .
- (5) Niech  $A$  będzie skończoną grupą abelową oraz  $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k$ . Wykazać, że jeśli  $a \in A$  oraz  $a = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ , gdzie  $a_i \in A_i$ , to  $r(a) = NWW(r(a_1), r(a_2), \dots, r(a_k))$ .
- (6) Niech  $(A, +)$  będzie grupą abelową. Wykazać, że:
- (a)  $T(A) < A$ ,
  - (b)  $T(T(A)) = T(A)$ ,
  - (c) jeżeli  $B < A$ , to  $T(B) = B \cap T(A)$ ,
  - (d) jeżeli  $A \cong B$ , to  $T(A) \cong T(B)$ ,
  - (e)  $T(A \oplus B) = T(A) \oplus T(B)$ ,
  - (f)  $T_p(A) < T(A) < A$ ,
  - (g)  $T_p(T_p(A)) = T_p(A) = T_p(T(A))$ ,
  - (h) jeżeli  $B < A$ , to  $T_p(B) = B \cap T_p(A)$ ,
  - (i) jeżeli  $A \cong B$ , to  $T_p(A) \cong T_p(B)$ ,
  - (j)  $T_p(A \oplus B) = T_p(A) \oplus T_p(B)$ ,
  - (k) jeżeli  $A$  jest skończone generowaną torsyjną grupą abelową, to  $T_p(A) = \{0\}$  dla prawie wszystkich liczb pierwszych  $p$ ,
  - (l)  $T_p(A/T_p(A)) = \{0\}$ ,
  - (m)  $pA < A$ , gdzie  $pA = \{pa : a \in A\}$ ,
  - (n) jeżeli  $A$  jest skończoną grupą cykliczną oraz  $|A| = p^k$ , to  $pA$  jest grupą cykliczną i  $|pA| = p^{k-1}$ ,
  - (o) jeżeli  $B < A$ , to  $pB = B \cap pA$ ,
  - (p) jeżeli  $A \cong B$ , to  $pA \cong pB$ ,
  - (q)  $p(A \times B) = pA \times pB$ .
- (7) Wyznaczyć wszystkie  $p$ -komponenty każdej z następujących grup:  $\mathbb{Z}_{20}$ ,  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$ ,  $U(\mathbb{Z}_{27})$ ,  $U(\mathbb{Z}_{30})$ ,  $\mathbb{Z}_{60}$ ,  $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$ ,  $\mathbb{Z}_{16}$ .
- (8) Grupy:
- (a)  $\mathbb{Z}_{24}$ ,
  - (b)  $\mathbb{Z}_{60}$

przedstawić jako sumę prostą  $p$ -komponent. Dla każdego elementu grupy znaleźć jego przedstawienie w postaci sumy elementów należących do odpowiednich składników prostych.

- (9) Grupę:  
 (a)  $\mathbb{Z}_{144}$ ,  
 (b)  $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{100} \times \mathbb{Z}_{1000}$   
 przedstawić w postaci sumy prostej  $p$ -grup.
- (10) Pokazać, że jeśli  $A$  jest  $p$ -grupą typu  $(p^{\alpha_1}, \dots, p^{\alpha_r})$ , to  $A$  zawiera podgrupę typu  $(p^{\beta_1}, \dots, p^{\beta_s})$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $s \leq r$  oraz  $\beta_s \leq \alpha_r, \beta_{s-1} \leq \alpha_{r-1}, \dots, \beta_1 \leq \alpha_{r-s+1}$ .
- (11) Wykazać, że jeśli  $A$  jest skończoną grupą abelową rzędu  $n$ , to dla każdego dzielnika naturalnego  $k$  liczby  $n$  grupa  $A$  zawiera podgrupę rzędu  $k$  (jest to twierdzenie odwrotne do twierdzenia Lagrange'a).
- (12) Wykazać, że grupa cykliczna rzędu  $p$ , gdzie  $p$  jest liczbą pierwszą i  $k > 1$ , nie jest sumą prostą podgrup cyklicznych.
- (13) Niech  $n \in \mathbb{N}$ . Udowodnić, że każda grupa abelowa rzędu  $n$  jest cykliczna wtedy i tylko wtedy, gdy  $n$  jest liczbą bezkwadratową (tzn. liczbą niepodzielną przez kwadrat żadnej liczby naturalnej większej od 1).
- (14) Sprawdzić, czy grupy  $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{72}$  oraz  $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{18}$  są izomorficzne.
- (15) Każdą z następujących grup przedstawić w postaci sumy prostej  $p$ -grup cyklicznych:  
 (a)  $U(\mathbb{Z}_8)$ ,  
 (b)  $U(\mathbb{Z}_{10})$ ,  
 (c)  $U(\mathbb{Z}_{15})$ ,  
 (d)  $U(\mathbb{Z}_{35})$ .
- (16) Wykazać, że jeśli  $A, B, C$  są skończonymi grupami abelowymi oraz  $A \oplus C \cong B \oplus C$ , to  $A \cong B$ .