

Zestaw zadań 4: Grupy permutacji. Normalizator, centralizator, komutant.

- (1) Dla permutacji $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ i $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \in S(6)$ wyznaczyć:
- (a) $\tau\sigma$,
 - (b) $\sigma\tau$,
 - (c) $\sigma\tau\sigma^{-1}$,
 - (d) $\langle\sigma\rangle$,
 - (e) $\langle\tau\sigma\rangle$,
 - (f) rozwiązanie w grupie $S(6)$ równania $\tau^{-1}X\sigma = \tau^2$.
- (2) Dany cykl $\sigma \in S(6)$ zapisać w postaci dwuwierszowej:
- (a) $\sigma = (4, 2, 5)$,
 - (b) $\sigma = (3, 5, 4, 2, 1, 6)$.
- (3) Daną permutację $\sigma \in S(9)$ przedstawić w postaci iloczynu cykli rozłącznych, a następnie przedstawić w postaci iloczynu transpozycji i sprawdzić czy σ jest parzysty czy nieparzysty :
- (a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 9 & 2 & 7 & 6 & 4 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,
 - (b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 7 & 9 & 3 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$,
 - (c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 6 & 9 & 5 & 4 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$,
 - (d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 & 2 & 8 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.
- (4) Udowodnić, że
- (a) jeżeli σ jest cyklem o długości k , to $r(\sigma) = k$,
 - (b) jeżeli permutacja σ jest iloczynem m cykli rozłącznych o długościach $k_1, \dots, k_m$, to $r(\sigma) = \text{NWW}(k_1, \dots, k_m)$.
- (5) Obliczyć rzędy permutacji σ, τ z poprzednich zadań.
- (6) Wykazać, że :
- (a) zbiory $\mathcal{A} = \{(1, 2), (1, 3), \dots, (1, n)\}$, $\mathcal{B} = \{(1, 2, \dots, n-1), (n-1, n)\}$ generują grupę $S(n)$.
 - (b) zbiory $\mathcal{C} =$ zbiór wszystkich cykli długości 3, $\mathcal{D} = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), \dots, (1, 2, n)\}$ generują grupę $A(n)$.
- (7) Dowieść, że centralizator dowolnego podzbioru M grupy G jest podgrupą grupy G .
- (8) Dowieść, że normalizator podgrupy H grupy G jest podgrupą zawierającą centralizator tej podgrupy.
- (9) Dowieść, że centrum grupy G jest jej podgrupą normalną.
- (10) Wykazać, że centralizator podgrupy normalnej jest podgrupą normalną.
- (11) Dowieść, że normalizator podgrupy $H \subset G$ jest największą podgrupą, w której H jest podgrupą normalną.
- (12) Wyznaczyć normalizator $N(H)$ podgrupy H w grupie G , jeśli
- (a) $G = GL(2, \mathbb{R})$, a H jest podgrupą macierzy diagonalnych;
 - (b) $G = GL(2, \mathbb{R})$, a H jest podgrupą macierzy postaci $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$;
 - (c) $G = S(4)$, $H = \langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle$.
- (13) Wyznaczyć centrum i wszystkie klasy elementów sprzężonych w grupie kwaternionowej Q_8 .
- (14) Wyznaczyć centrum grupy

- (a) $S(n)$;
 - (b) $A(n)$;
 - (c) $D(n)$.
- (15) Wykazać, że centrum grupy rzędu p^n , gdzie p jest liczbą pierwszą, a $n \in \mathbb{N}$, zawiera więcej niż jeden element.
- (16) Niech G będzie zbiorem górnótrójkątnych macierzy stopnia 3 o elementach z ciała $\mathbb{Z}_p$, mających jedynekę na każdym miejscu głównej przekątnej.
- (a) Wykazać, że G jest grupą przemienną rzędu p^3 względem mnożenia.
 - (b) Wyznaczyć centrum grupy G .
 - (c) Wyznaczyć wszystkie klasy elementów sprzężonych grupy G .
- (17) Wyznaczyć centrum grupy:
- (a) $GL(2, \mathbb{R})$;
 - (b) $O(2, \mathbb{R})$ (grupa macierzy ortogonalnych stopnia 2 nad $\mathbb{R}$);
 - (c) $SO(2, \mathbb{R})$ (grupa macierzy ortogonalnych stopnia 2 nad $\mathbb{R}$ o wyznaczniku 1);
 - (d) $SO(3, \mathbb{R})$;
 - (e) $SU(3, \mathbb{C})$ (grupa macierzy unitarnych stopnia 3 nad $\mathbb{C}$);
 - (f) $SU(n, \mathbb{C})$.
- (18) Wyznaczyć komutator macierzy nieosobliwych:
- (a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;
 - (b) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$;
 - (c) dwóch transpozycji w grupie symetrycznej $S(n)$.
- (19) Dowieść następujących własności komutanta $[G, G]$ grupy G :
- (a) $[G, G]$ jest podgrupą normalną G ;
 - (b) grupa ilorazowa $G/[G, G]$ jest przemienna;
 - (c) jeśli N jest podgrupą normalną G i G/N jest przemienna, to $[G, G] \subset N$.
- (20) Wykazać, że jeśli $\phi : G \rightarrow H$ jest homomorfizmem, to $\phi([G, G]) = [\phi(G), \phi(G)]$.
- (21) Skonstruować bijekcję między homomorfizmami grupy G do grupy abelowej i homomorfizmami jej grupy ilorazowej przez komutant.
- (22) Wykazać, że komutant grupy $GL(2, K)$ jest zawarty w $SL(2, K)$.
- (23) Wyznaczyć komutant grupy $GL(2, K)$.
- (24) Wyznaczyć komutant grupy $GL(n, K)$.
- (25) Wykazać, że komutant iloczynu prostego jest iloczynem prostym komutantów czynników.
- (26) Wyznaczyć komutanty i rzędy grupy ilorazowej przez komutant następujących grup:
- (a) $S(3)$;
 - (b) $A(4)$;
 - (c) $S(4)$;
 - (d) Q_8 .
- (27) Wyznaczyć komutanty grup
- (a) $S(n)$;
 - (b) $D(n)$.
- (28) Wykazać, że komutant podgrupy normalnej jest podgrupą normalną całej grupy.
- (29) *Ciągiem komutantów* (lub *ciągami pochodnym*) grupy G nazywa się ciąg podgrup

$$G = G^{(0)} \supset G^{(1)} \supset G^{(2)} \supset \dots$$

gdzie $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$. Wykazać, że

- (a) wszystkie wyrazy ciągu komutantów są normalnymi podgrupami G ;
- (b) dla każdego homomorfizmu ϕ grupy G na grupę H zachodzi $\phi(G^{(i)}) = H^{(i)}$.