

Zadanie domowe 6

Termin: 14 stycznia 2014

- (1) Udowodnić, że zbiór wszystkich elementów nilpotentnych w pierścieniu przemiennym tworzy ideał.
- (2) Udowodnić, że w pierścieniu przemiennym z jedynką zbiór składający się z wszystkich dzielników zera (włącznie z zerem) zawiera przynajmniej jeden ideał pierwszy.
- (3) Udowodnić, że ideał $\mathfrak{M} \neq R$ w pierścieniu przemiennym z jedynką R jest maksymalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $r \in R \setminus \mathfrak{M}$ istnieje $x \in R$ takie, że $1 - rx \in \mathfrak{M}$.
- (4) Sprawdzić, że zbiór $2\mathbb{Z}$ wszystkich liczb parzystych jest pierścieniem. Wskazać ideał maksymalny $\mathfrak{M}$ pierścienia $2\mathbb{Z}$ taki, że $2\mathbb{Z}/\mathfrak{M}$ nie jest ciałem. Czego dowodzi ten przykład?
- (5) Wyznaczyć wszystkie ideały pierwsze i maksymalne pierścienia $\mathbb{Z}_n$.