

Zadanie domowe 5

Termin: 3 grudnia 2013

- (1) Niech R będzie pierścieniem z jedyneką i niech $a, b \in R$. Udowodnić, że jeżeli element $1 - ab$ jest odwracalny, to odwracalny jest również element $1 - ba$.
- (2) Niech R będzie pierścieniem skończonym i bez dzielników zera. Wykazać, że R jest pierścieniem z jedyneką oraz każdy różny od zera element R jest odwracalny.
- (3) Niech R będzie pierścieniem z jedyneką i niech $a, b \in R$.
 - (a) Udowodnić, że jeżeli elementy ab i ba są odwracalne, to również elementy a i b są odwracalne.
 - (b) Udowodnić, że jeżeli R jest pierścieniem bez dzielników zera i element ab jest odwracalny, to również elementy a i b są odwracalne. Podać przykład, że twierdzenie jest fałszywe bez założenia, że R nie ma dzielników zera.
- (4) Pierścień R taki, że $a^2 = a$ dla wszystkich $a \in R$ nazywamy **pierścieniem boole'owskim**. Udowodnić, że każdy pierścień boole'owski jest przemienny oraz $a + a = 0$ dla wszystkich $a \in R$.
- (5) **Centrum** pierścienia R określamy następująco:

$$Z(R) = \{a \in R : \forall x \in R (ax = xa)\}.$$

Wyznaczyć $Z(M(n, K))$ tj. centrum pierścienia macierzy kwadratowych stopnia n o współrzędnych z ciała K .