

Zadanie domowe 2

Termin: 25 października 2013

- (1) Niech G będzie grupą oraz $H < F < G$.
- (a) Jeśli X jest zbiorem reprezentantów warstw lewostronnych G względem F oraz Y jest zbiorem reprezentantów warstw lewostronnych F względem H , to $XY = \{xy \in G : x \in X \wedge y \in Y\}$ jest zbiorem reprezentantów warstw lewostronnych G względem H .
 - (b) Wykorzystać (a) do udowodnienia następującego **uogólnionego twierdzenia Lagrange’a**:
jeśli G jest grupą skończoną oraz $H < F < G$, to
$$(G : H) = (G : F) \cdot (F : H).$$
- (2) Niech $H < F < G$ oraz $(G : F) < \infty$. Pokazać, że jeśli $(G : F) = (G : H)$, to $H = F$. Podać przykład grupy z podgrupami o nieskończonym indeksie, dla których analogicznie twierdzenie nie jest prawdziwe.
- (3) Pokazać, że dwa elementy rzędu drugiego dowolnej grupy są przemienne wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn ma rząd nie większy niż dwa.
- (4) Pokazać, że każda grupa rzędu ≤ 5 jest abelowa.
- (5) Udowodnić, że w grupie cyklicznej G rzędu n dla każdego dzielnika d liczby n istnieje dokładnie jedna podgrupa grupy G rzędu d .