

Zadanie domowe 1

Termin: 18 października 2013

- (1) Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$. W zbiorze $\mathbb{R}$ definiujemy działanie $\oplus$ następująco:

$$x \oplus y = ax + by + c.$$

Znaleźć wszystkie trójki a, b, c takie, że $(\mathbb{R}, \oplus)$ jest grupą.

- (2) Pokazać, że jeśli istnieją trzy kolejne liczby naturalne $k-1, k, k+1$ takie, że dla każdego elementu x, y grupy G zachodzi

$$(xy)^n = x^n y^n, \text{ dla } n \in \{k-1, k, k+1\},$$

to grupa G jest przemienna.

- (3) Pokazać, że jeśli dla dwóch elementów a, b grupy zachodzą równości

$$b^6 = 1 \text{ oraz } ab = b^4 a,$$

to także

$$b^3 = 1 \text{ oraz } ab = ba.$$

- (4) Wskazać przykład grupy G oraz dwóch kolejnych liczb naturalnych $k, k+1$ takich, że dla każdego elementu x, y grupy G zachodzi

$$(xy)^n = x^n y^n, \text{ dla } n \in \{k, k+1\},$$

ale grupa G nie jest przemienna.

- (5) Pokazać, że skończony podzbiór grupy jest podgrupą wtedy i tylko wtedy, gdy jest zamknięty ze względu na działanie grupowe.