

5. WYKŁAD 5: TORSYJNE GRUPY ABELOWE; GRUPY ABELOWE SKOŃCZONE.

5.1. Iloczyny (sumy) proste wewnętrzne i zewnętrzne.

Uwaga 5.1. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $H_1, H_2 < G$. Następujące warunki są równoważne:

- (1) $G = H_1 H_2$ oraz $H_1 \cap H_2 = \{1\}$,
- (2) każdy element $g \in G$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci

$$g = h_1 h_2,$$

gdzie $h_1 \in H_1$ oraz $h_2 \in H_2$.

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2): Załóżmy, że $G = H_1 H_2$ oraz $H_1 \cap H_2 = \{1\}$. Załóżmy, że dla pewnych $h_1, h'_1 \in H_1$ oraz $h_2, h'_2 \in H_2$ zachodzi $h_1 h_2 = h'_1 h'_2$. Wówczas $(h'_1)^{-1} h_1 = h'_2 h_2^{-1} \in H_1 \cap H_2 = \{1\}$, więc $h_1 = h'_1$ oraz $h_2 = h'_2$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Załóżmy, że każdy element $g \in G$ ma jednoznaczne przedstawienie postaci $g = h_1 h_2$, gdzie $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$. Wówczas oczywiście $G = H_1 H_2$. Załóżmy, że $g \in H_1 \cap H_2$. Wówczas $g = g \cdot 1 = 1 \cdot g$. Zatem $g = 1$. $\square$

Oznaczenie: Gdy $(G, +)$ zapisana jest w notacji addytywnej, piszemy $H_1 + H_2$ zamiast $H_1 H_2$.

Definicja 5.1. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $H_1, H_2 < G$.

- (1) G jest **slabym iloczynem (sumą) wewnętrznym** podgrup H_1 i H_2 , gdy spełnia jeden (a więc wszystkie) warunki Uwagi 5.1.
- (2) G jest **slabym iloczynem (sumą) półprostym wewnętrznym** podgrup H_1 i H_2 , gdy jest slabym iloczynem (sumą) wewnętrznym oraz $H_1 \triangleleft G$ lub $H_2 \triangleleft G$.
- (3) G jest **slabym iloczynem (sumą) prostym wewnętrznym** podgrup H_1 i H_2 , gdy jest slabym iloczynem (sumą) wewnętrznym oraz $H_1 \triangleleft G$ i $H_2 \triangleleft G$.

Przykłady:

- (1) Rozważmy grupę $D(n)$. Niech $Obr(n)$ oznacza grupę obrotów, a $Odb(n)$ dowolną dwuelementową grupę generowaną przez odbicie. Wówczas $D(n) = Obr(n) \cdot Odb(n)$ jest slabym iloczynem półprostym wewnętrznym, ale nie jest slabym iloczynem prostym wewnętrznym.
- (2) Rozważmy grupę abelową $(A, \cdot)$. Każda podgrupa grupy abelowej jest normalna, a więc A jest slabym iloczynem wewnętrznym $\Leftrightarrow A$ jest slabym iloczynem półprostym wewnętrznym $\Leftrightarrow A$ jest slabym iloczynem prostym wewnętrznym.

Uwaga 5.2. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $H_1, H_2 < G$. Następujące warunki są równoważne:

- (1) odwzorowanie $\phi : H_1 \times H_2 \rightarrow G$ dane wzorem $\phi(h_1, h_2) = h_1 h_2$ jest izomorfizmem;
- (2) $G = H_1 H_2$, $H_1 \cap H_2 = \{1\}$ oraz $\forall h_1 \in H_1 \forall h_2 \in H_2 (h_1 h_2 = h_2 h_1)$;
- (3) G jest slabym iloczynem prostym wewnętrznym podgrup H_1 i H_2 .

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2) : Ponieważ ϕ jest izomorfizmem, więc jest surjekcją, a zatem $G = H_1 H_2$. Ustalmy $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$. Wówczas:

$$h_1 h_2 = \phi(h_1, h_2) = ((\phi(h_1, h_2))^{-1})^{-1} = (\phi(h_1^{-1}, h_2^{-1}))^{-1} = (h_1^{-1} h_2^{-1})^{-1} = ((h_2 h_1)^{-1})^{-1} = h_2 h_1.$$

Przypuśćmy, że istnieje $1 \neq g \in H_1 \cap H_2$. Wówczas $\phi(1, g) = g = \phi(g, 1)$, wbrew założeniu, że ϕ jest izomorfizmem, a więc injekcją.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Wystarczy udowodnić, że $H_1 \triangleleft G$ i $H_2 \triangleleft G$. Ustalmy $g \in G$ i niech $g = h_1 h_2$ dla $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$. Ustalmy $h \in H_1$. Wówczas:

$$ghg^{-1} = h_1 h_2 h (h_1 h_2)^{-1} = h_1 h_2 h h_2^{-1} h_1^{-1} = h_1 h_2 h_2^{-1} h h_1^{-1} = h_1 h h_1^{-1} \in H_1,$$

a zatem $gH_1g^{-1} \subset H_1$. Podobnie pokazujemy, że $H_2 \triangleleft G$.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Ponieważ G jest słabym iloczynem prostym wewnętrznym, a więc w szczególności słabym iloczynem wewnętrznym, więc odwzorowanie ϕ jest dobrze określoną bijekcją. Ustalmy $(h_1, h_2), (h'_1, h'_2) \in H_1 \times H_2$. Wówczas:

$$\phi((h_1, h_2) \cdot (h'_1, h'_2)) = \phi(h_1h'_1, h_2h'_2) = h_1h'_1h_2h'_2 = h_1h_2h'_1h'_2 = \phi(h_1, h_2)\phi(h'_1, h'_2),$$

a więc ϕ jest homomorfizmem. $\square$

Definicja 5.2. Niech H_1, H_2 będą grupami. Grupę $H_1 \times H_2$ nazywamy **iloczynem (sumą) prostym zewnętrznym** grup H_1 i H_2 .

Oznaczenie: Gdy H_1 i H_2 zapisane są w notacji addytywnej, piszemy $H_1 \oplus H_2$ zamiast $H_1 \times H_2$. Ze względu na izomorfizm z Uwagi 5.2, będziemy na ogół mówić po prostu o iloczynach (sumach) prostych, bez rozróżniania między słabymi iloczynami (sumami) prostymi wewnętrznymi a iloczynami (sumami) prostymi zewnętrznymi. Opisane konstrukcje w naturalny sposób przenoszą się na dowolną skończoną liczbę grup. W ten sposób mówimy o iloczynach (sumach) prostych grup $H_1, \dots, H_n$, które oznaczać będziemy przez $H_1 \times \dots \times H_n$, lub $H_1 \oplus \dots \oplus H_n$ w notacji addytywnej. Konstrukcje te przenoszą się także na nieskończoną liczbę grup, nie będziemy się jednak nimi zajmować

5.2. Torsyjne grupy abelowe; grupy abelowe skończone.

Definicja 5.3. Grupę nazywamy **torsyjną**, jeżeli każdy element ma rząd skończony. Jeżeli rzędy elementów są wspólnie ograniczone, to ograniczenie to nazywamy **wykładnikiem grupy**. Grupę nazywamy **beztorsyjną**, gdy każdy element ma rząd nieskończony.

Definicja 5.4. Niech $(A, +)$ będzie grupą abelową. Zbiór wszystkich elementów grupy A o skończonym rzędzie nazywamy **częścią torsyjną grupy** i oznaczamy $T(A)$.

Uwaga 5.3. Niech $(A, +)$ będzie grupą abelową. Wówczas:

- (1) $T(A) < A$,
- (2) $T(T(A)) = T(A)$,
- (3) jeżeli $B < A$, to $T(B) = B \cap T(A)$,
- (4) jeżeli $A \cong B$, to $T(A) \cong T(B)$,
- (5) $T(A \oplus B) = T(A) \oplus T(B)$.

Proste dowody powyższych własności pozostawiamy jako ćwiczenie.

Definicja 5.5. Niech $(A, +)$ będzie grupą abelową, niech p będzie liczbą pierwszą. Zbiór wszystkich elementów grupy A , których rząd jest potęgą liczby p nazywamy **p -komponentą (lub p -składową) grupy A** i oznaczamy $T_p(A)$.

Uwaga 5.4. Niech $(A, +)$ będzie grupą abelową. Wówczas:

- (1) $T_p(A) < T(A) < A$,
- (2) $T_p(T_p(A)) = T_p(A) = T_p(T(A))$,
- (3) jeżeli $B < A$, to $T_p(B) = B \cap T_p(A)$,
- (4) jeżeli $A \cong B$, to $T_p(A) \cong T_p(B)$,
- (5) $T_p(A \oplus B) = T_p(A) \oplus T_p(B)$,
- (6) jeżeli A jest skończeniem generowaną torsyjną grupą abelową, to $T_p(A) = \{0\}$ dla prawie wszystkich liczb pierwszych p ,
- (7) $T_p(A/T_p(A)) = \{0\}$

Proste dowody powyższych własności pozostawiamy jako ćwiczenie.

Twierdzenie 5.1. *Niech $(A, +)$ będzie grupą abelową torsyjną, niech $p_1, \dots, p_n$ będą wszystkimi liczbami pierwszymi, dla których $T_{p_i}(A) \neq \{0\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Wówczas:*

(1) *A jest sumą prostą wszystkich swoich p -komponent:*

$$A = T_{p_1}(A) \oplus \dots \oplus T_{p_n}(A),$$

(2) *jeżeli A jest sumą prostą pewnych p -grup $B(p)$, $p \in \{q_1, \dots, q_m\}$, $A = B(q_1) \oplus \dots \oplus B(q_m)$, to $\{p_1, \dots, p_n\} = \{q_1, \dots, q_m\}$ oraz:*

$$T_{p_i}(A) = B(p_i), \text{ dla } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Dowód. (1) Pokażemy, że $A = T_{p_1} + \dots + T_{p_n}(A)$. Ustalmy $a \in A$. Niech $r(a) = n = p_1^{s_1} \cdot \dots \cdot p_k^{s_k}$, dla pewnych liczb pierwszych $p_1, \dots, p_k$, $k \geq n$. Niech $n_i = \frac{n}{p_i^{s_i}}$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Wówczas $NWD(n_1, \dots, n_k) = 1$, więc istnieją $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{Z}$ takie, że

$$n_1 x_1 + \dots + n_k x_k = 1.$$

Zatem:

$$n_1 x_1 a + \dots + n_k x_k a = a.$$

Ponadto dla $i \in \{1, \dots, k\}$, $p_i^{s_i} n_i x_i a = p_i^{s_i} \frac{n}{p_i^{s_i}} x_i a = x_i n a = 0$, a więc $r(n_i x_i a) | p_i^{k_i}$, więc $n_i x_i a \in T_{p_i}(A)$.

Pokażemy, że $A = T_{p_1} \oplus \dots \oplus T_{p_n}(A)$. Przypuśćmy, że dla pewnego $a \in A$, po ewentualnej zmianie numeracji:

$$a = a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n, a_i, b_i \in T_{p_i}(A), i \in \{1, \dots, n\},$$

przy czym $a_1 \neq b_1$. Wówczas:

$$a_1 - b_1 = (b_2 - a_2) + \dots + (b_n - a_n)$$

oraz $a_1 - b_1 \in T_{p_1}(A)$. Z drugiej strony

$$r((b_2 - a_2) + \dots + (b_n - a_n)) | NWW(r(b_2 - a_2), r(b_n - a_n)) = NWW(p_2^{l_2}, \dots, p_n^{l_n}),$$

dla pewnych $l_2, \dots, l_n \in \mathbb{N}$. Zatem $r(a_1 - b_1) = 1$, czyli $a_1 - b_1 = 0$, a więc $a_1 = b_1$, co doprowadza nas do sprzeczności.

(2) Ustalmy $i \in \{1, \dots, n\}$. Zauważmy, że

$$T_{p_i}(B(q)) = \begin{cases} B(p_i), & \text{jeżeli } p_i = q, \\ \{0\}, & \text{jeżeli } p_i \neq q. \end{cases}$$

Wobec tego:

$$T_{p_i}(A) = T_{p_i}(B(q_1) \oplus \dots \oplus B(q_m)) = T_{p_i}(B(q_1)) \oplus \dots \oplus T_{p_i}(B(q_m)) = B(p_i).$$

□

Wniosek 5.1 (II twierdzenie strukturalne). *Niech $(A, +)$ będzie grupą abelową skończoną, niech $|A| = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$, gdzie $p_1, \dots, p_n$ są parami różnymi liczbami pierwszymi. Wówczas grupa A ma jednoznaczne przedstawienie w postaci sumy prostej p -grup:*

$$A = T_{p_1}(A) \oplus \dots \oplus T_{p_n}(A).$$

Oznaczenie: Niech $(A, +)$ będzie grupą abelową, niech $p \in \mathbb{P}$ będzie liczbą pierwszą. Oznaczamy:

$$pA = \{pa : a \in A\}.$$

Uwaga 5.5. Niech $(A, +)$ będzie grupą abelową, niech $p \in \mathbb{P}$ będzie liczbą pierwszą. Wówczas:

- (1) $pA < A$,
- (2) jeżeli A jest skończoną grupą cykliczną oraz $|A| = p^k$, to pA jest grupą cykliczną i $|pA| = p^{k-1}$,
- (3) jeżeli $B < A$, to $pB = B \cap pA$,
- (4) jeżeli $A \cong B$, to $pA \cong pB$,
- (5) $p(A \times B) = pA \times pB$,
- (6) odwzorowanie $\phi : A \rightarrow pA$ dane wzorem $\phi(a) = pa$ jest surjektywnym homomorfizmem,
- (7) jeżeli A jest grupą abelową skończoną, to:
 - (a) gdy $p \mid |A|$, to $|pA| < |A|$,
 - (b) gdy $p \nmid |A|$, to $|pA| = |A|$.

Proste dowody powyższych własności pozostawiamy jako ćwiczenie.

Twierdzenie 5.2. Niech $(A, +)$ będzie skończoną p -grupą abelową. Wówczas grupa A jest sumą prostą p -grup cyklicznych.

Dowód. Niech $|A| = p^n$. Dowód prowadzimy indukcyjnie względem n . Jeżeli $n = 1$, to $|A| = p$, a zatem $A \cong \mathbb{Z}_p$ i A nie ma właściwych podgrup, a sama jest grupą cykliczną. Jeżeli $n > 1$, to założmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich liczb $l \in \mathbb{N}$, $l < n$. Wobec ostatniej części Uwagi 5.5, $|pA| < |A|$, niech więc $|pA| = p^l$, dla $l < n$. Wobec założenia indukcyjnego

$$pA = \langle a_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle a_r \rangle,$$

dla pewnych elementów $a_1, \dots, a_r \in pA$ o rzędach będących potęgami liczby p . Niech $x_1, \dots, x_r \in A$ będą takimi elementami, że $a_1 = px_1, \dots, a_r = px_r$.

Pokażemy, że $\langle x_1 \rangle + \dots + \langle x_r \rangle$ jest grupą, która jest sumą prostą grup $\langle x_1 \rangle, \dots, \langle x_r \rangle$. Sprawdzenie, że jest to istotnie grupa, pozostawiamy jako ćwiczenie, a dla udowodnienia, że jest to suma prosta, przypuścmy, że

$$k_1x_1 = k_2x_2 + \dots + k_rx_r,$$

dla pewnych $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$k_1px_1 = k_2px_2 + \dots + k_rpx_r,$$

i ponieważ $\langle a_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle a_r \rangle$ jest sumą prostą, więc $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$ i tym samym $\langle x_1 \rangle \cap (\langle x_2 \rangle + \dots + \langle x_r \rangle) = \{0\}$. Podobnie sprawdzamy, że $\langle x_i \rangle \cap (\langle x_1 \rangle + \dots + \langle x_{i-1} \rangle + \langle x_{i+1} \rangle + \dots + \langle x_r \rangle) = \{0\}$, dla $i \in \{2, \dots, r\}$.

Niech zatem $H = \langle x_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle x_r \rangle$. Rozważmy rodzinę

$$\mathcal{B} = \{B < A : B \cap H = \{0\}\}.$$

Jako rodzina podgrup grupy skończonej $\mathcal{B}$ jest skończona, w szczególności zawiera element maksymalny. Oznaczmy go przez B . Zauważmy, że $B + H$ jest grupą oraz wobec określenia B jest to suma prosta grup B i H .

Pokażemy, że $A = B \oplus H$. Inkluzja $(\supset)$ jest oczywista, pozostaje wykazać inkluzję $(\subset)$. Przypuścmy, że istnieje $a \in A$ taki, że $a \notin B + H$. Wówczas $pa = ph$ dla pewnego $h \in H$. Ponadto $c = a - h \notin B + H$ oraz $pc = pa - ph = 0$. Wobec maksymalności B , $\langle c \rangle \cup B \cap H \neq \{0\}$, a więc istnieją $h_1 \in H$ oraz $b_1 \in B$ takie, że

$$0 \neq h_1 = kc + b_1, \text{ oraz } 0 < k < p.$$

Ponieważ $NWD(k, p) = 1$, więc dla pewnych $s, t \in \mathbb{Z}$:

$$sk + tp = 1,$$

a więc

$$c = (sk + tp)c = skc = sh_1 - sb_1 \in H + B,$$

co daje sprzeczność.

Dla zakończenia dowodu zauważmy, że $|B| < |A|$, więc B jest sumą prostą p -grup cyklicznych. Wobec tego B i H są sumami prostymi grup cyklicznych oraz $A = B \oplus H$. $\square$

Przykłady:

(3) Rozważmy skończoną p -grupę abelową $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Wówczas:

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \langle (1, 1) \rangle \oplus \langle (1, 0) \rangle = \langle (1, 0) \rangle \oplus \langle (0, 1) \rangle.$$

Twierdzenie 5.3. Niech $(A, +)$ będzie skończoną p -grupą abelową. Niech

$$A = A_1 \oplus \dots \oplus A_r \text{ oraz } A = B_1 \oplus \dots \oplus B_s$$

będą dwoma różnymi rozkładami na sumy proste grup cyklicznych. Przyjmijmy, że

$$|A_1| \leq |A_2| \leq \dots \leq |A_r| \text{ oraz } |B_1| \leq |B_2| \leq \dots \leq |B_s|.$$

Wówczas $r = s$ oraz $|A_i| = |B_i|$ dla $i \in \{1, \dots, r\}$.

Dowód. Niech $|A_i| = p^{\alpha_i}$, $|B_j| = p^{\beta_j}$, $i \in \{1, \dots, r\}$, $j \in \{1, \dots, s\}$. Wówczas $|A| = p^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p^{\alpha_r} = p^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p^{\beta_s}$, więc w szczególności $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = \beta_1 + \dots + \beta_s$. Dowód prowadzimy indukcyjnie względem $\alpha_1 + \dots + \alpha_r$.

Jeżeli $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = 1$, to za bardzo nie ma czego dowodzić. Załóżmy więc, że $\alpha_1 + \dots + \alpha_r > 1$ i że twierdzenie jest prawdziwe dla p -grup A rzędów mniejszych od $p^{\alpha_1 + \dots + \alpha_r}$. Niech $0 \leq k \leq r$ oraz $0 \leq l \leq s$ będą takimi liczbami, że

$$|A_1| = \dots = |A_k| = p \text{ oraz } |B_1| = \dots = |B_l| = p.$$

Wówczas $|A| = p^{k + \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_r} = p^{l + \beta_{l+1} + \dots + \beta_s}$. Ponadto:

$$pA = pA_1 \oplus \dots \oplus pA_r = pA_{k+1} \oplus \dots \oplus pA_r$$

oraz

$$pA = pB_1 \oplus \dots \oplus pB_s = pB_{l+1} \oplus \dots \oplus pB_s,$$

a zatem

$$pA_{k+1} \oplus \dots \oplus pA_r = pB_{l+1} \oplus \dots \oplus pB_s,$$

przy czym pA_i i pB_j , $i \in \{k+1, \dots, r\}$, $j \in \{l+1, \dots, s\}$ są grupami cyklicznymi, których rzędy spełniają zależność:

$$|pA_i| = p^{\alpha_i - 1}, \text{ dla } i \in \{k+1, \dots, r\} \text{ oraz } |pB_j| = p^{\beta_j - 1}, \text{ dla } j \in \{l+1, \dots, s\}.$$

Ponadto $|pA| < |A|$ i zachodzi

$$|pA_{k+1}| \leq \dots \leq |pA_r| \text{ oraz } |pB_{l+1}| \leq \dots \leq |pB_s|.$$

Wobec założenia indukcyjnego $r - k = s - l$ oraz

$$|pA_{k+1}| = |pB_{l+1}|, \dots, |pA_r| = |pB_s|,$$

skąd $p^{\alpha_{k+1}-1} = p^{\beta_{l+1}-1}, \dots, p^{\alpha_r-1} = p^{\beta_s-1}$, więc i $p^{\alpha_{k+1}} = p^{\beta_{l+1}}, \dots, p^{\alpha_r} = p^{\beta_s}$, skąd $\alpha_{k+1} = \beta_{l+1}, \dots, \alpha_r = \beta_s$. Tym samym z równości

$$k + \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_r = l + \beta_{l+1} + \dots + \beta_s$$

wynika $k = l$, czyli $|A_i| = |B_i|$ dla $i \in \{1, \dots, r\}$. $\square$

Wniosek 5.2 (I twierdzenie strukturalne). *Niech $(A, +)$ będzie grupą abelową skończoną. Wówczas istnieje przedstawienie A w postaci sumy prostej p -grup cyklicznych*

$$A = A_{11} \oplus \dots \oplus A_{1k_1} \oplus A_{21} \oplus \dots \oplus A_{2k_2} \oplus \dots \oplus A_{s1} \oplus \dots \oplus A_{sk_s},$$

przy czym $|A_{11}| = p_1^{t_{11}}, \dots, |A_{1k_1}| = p_1^{t_{1k_1}}, |A_{21}| = p_2^{t_{21}}, \dots, |A_{2k_2}| = p_2^{t_{2k_2}}, \dots, |A_{s1}| = p_s^{t_{s1}}, \dots, |A_{sk_s}| = p_s^{t_{sk_s}}$, gdzie $p_1, \dots, p_s$ są parami różnymi liczbami pierwszymi, wykładniki dobrane są tak, aby $t_{11} \leq \dots \leq t_{1k_1}, t_{21} \leq \dots \leq t_{2k_2}, \dots, t_{s1} \leq \dots \leq t_{sk_s}$ oraz ciąg liczb $t_{11}, \dots, t_{1k_1}, t_{21}, \dots, t_{2k_2}, \dots, t_{s1}, \dots, t_{sk_s}$ jest jednoznacznie wyznaczony przez grupę A . W szczególności:

$$|A| = p_1^{t_{11} + \dots + t_{1k_1}} p_2^{t_{21} + \dots + t_{2k_2}} \cdot \dots \cdot p_s^{t_{s1} + \dots + t_{sk_s}}.$$

Ciąg

$$(p_1^{t_{11}}, \dots, p_1^{t_{1k_1}}, p_2^{t_{21}}, \dots, p_2^{t_{2k_2}}, \dots, p_s^{t_{s1}}, \dots, p_s^{t_{sk_s}})$$

nazywamy **typem** skończonej grupy abelowej A , a jego elementy **niezmiennikami**.

Przykłady:

(4) Rozważmy skończoną grupę abelową $\mathbb{Z}_{60}$. Wówczas, skoro $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, to

$$\mathbb{Z}_{60} = T_2(\mathbb{Z}_{60}) \oplus T_3(\mathbb{Z}_{60}) \oplus T_5(\mathbb{Z}_{60}).$$

$T_2(\mathbb{Z}_{60}), T_3(\mathbb{Z}_{60}), T_5(\mathbb{Z}_{60})$, jako podgrupy grupy cyklicznej o rzędach, odpowiednio, 4, 3 i 5 są cykliczne, a więc $T_2(\mathbb{Z}_{60}) \cong \mathbb{Z}_4, T_3(\mathbb{Z}_{60}) \cong \mathbb{Z}_3, T_5(\mathbb{Z}_{60}) \cong \mathbb{Z}_5$. Tym samym

$$\mathbb{Z}_{60} = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$$

i $\mathbb{Z}_{60}$ ma typ $(4, 3, 5)$.