Pojęcie pierścienia.

Definicja:

Niech R będzie zbiorem niepustym.

1. Algebrę $(R, +, \cdot)$ nazywamy **pierścieniem,** gdy $(R, +)$ jest grupą abelową, działanie $\cdot$ jest łaczne oraz rozdzielne względem działania $+$, to znaczy

$$\forall x, y, z \in R[x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z],$$

$$\forall x, y, z \in R[(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x].$$

Działanie $+$ nazywamy **dodawaniem** w pierścieniu R, a działanie $\cdot$ **mnożeniem.** Element neutralny dodawania nazywamy **zerem** i oznaczamy przez 0. Pierścień $(R, +, \cdot)$ nazywamy **pierścieniem zerowym,** jeżeli $R = \{0\}$.

2. Algebrę $(R, +, \cdot)$ nazywamy **pierścieniem przemiennym,** gdy jest pierścieniem i gdy mnożenie jest przemienne.
3. Algebrę $(R, +, \cdot)$ nazywamy **pierścieniem z jedynką,** gdy jest pierścieniem i gdy mnożenie ma element neutralny, który wówczas nazywamy **jedynką** i oznaczamy przez 1.
4. Algebrę $(R, +, \cdot)$ nazywamy **ciałem,** gdy jest niezerowym pierścieniem przemiennym z jedynką i gdy dla każdego elementu różnego od 0 istnieje element odwrotny względem mnożenia.

Uwaga

Niech $(R, +, \cdot)$ *będzie ciałem. Wówczas:*

1. R *zawiera co najmniej dwa elementy,*
2. $(R, +)$ *jest grupą abelową,*
3. $(R^*, \cdot)$ *jest grupą abelową, gdzie* $R^* = R \backslash \{0\}$.

Przykłady:

1. **Pierścienie liczbowe.** $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$ są przykładami pierścieni przemiennych z jedynką. $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ nie jest pierścieniem. Ponadto $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$ są ciałami, zaś $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nie jest.

3. **Pierścienie reszt.** Niech $n \in \mathbb{N}$ i rozważmy $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ z działaniami $\oplus_n$ oraz $\otimes_n$. $(\mathbb{Z}_n, \oplus_n, \otimes_n)$ są przykładami pierścieni przemiennych z jedynką. $(\mathbb{Z}_n, \oplus_n, \otimes_n)$ na ogół nie jest ciałem, chyba że n jest liczbą pierwszą.

4. **Pierścienie wielomianów.** Niech $\mathbb{R}[x]$ będzie zbiorem wielomianów zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych. Wówczas $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ jest pierścieniem przemiennym z jedynką, który nie jest ciałem, gdzie $+$ i $\cdot$ oznaczają działania, odpowiednio, dodawania i mnożenia wielomianów.

5. **Pierścienie macierzy.** Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $M(n, F)$ oznacza zbiór macierzy kwadratowych stopnia n o współczynnikach z ciała F. $(M(n, F), +, \cdot)$ jest pierścieniem z jedynką, przy czym $+$ i $\cdot$ oznaczają tu, odpowiednio, dodawanie i mnożenie macierzy. Pierścień ten na ogół nie jest przemienny.

6. **Pierścień endomorfizmów.** Niech V będzie przestrzenią liniową. $(V, +)$. Oznaczmy przez $End(V)$ zbiór endomorfizmów liniowych przestrzeni V. $(End(V), +\circ)$ jest pierścieniem z jedynką, który na ogół nie jest przemiennt, przy czym $+$ i $\circ$ są tu działaniami, odpowiednio, dodawania i składania przekształceń liniowych.

7. **Pierścienie funkcji.** Niech $(R, +_R, \cdot_R)$ będzie pierścieniem, niech $X \neq \emptyset$. W rodzinie funkcji

$$R^X = \{f : X \to R : f \text{ jest funkcją}\}$$

definiujemy działania

$$(f + g)(x) = f(x) +_R g(x) \text{ oraz } (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot_R g(x).$$

$(R^X, +, \cdot)$ jest pierścieniem, który jest przemienny, gdy R jest przemienny.

8. **Skończony produkt pierścieni.** Niech $(R_1, +_1, \cdot_1), \ldots, (R_n, +_n, \cdot_n)$ będą pierścieniami. W produkcie kartezjańskim $R = R_1 \times \ldots \times R_n$ definiujemy działania "po współrzędnych":

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 +_1 b_1, \ldots, a_n +_n b_n),$$

$$(a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 \cdot_1 b_1, \ldots, a_n \cdot_n b_n).$$

$(R, +, \cdot)$ jest pierścieniem, który jest przemienny (z jedynką), gdy wszystkie pierścienie $R_1, \ldots, R_n$ są przemienne (z jedynką).

9. **Pierścień grupowy.** Niech $(G, *)$ będzie grupą, niech $(R, +_R, \cdot_R)$ będzie pierścieniem. Rozważmy zbiór

$R[G] =$ zbiór funkcji $f : G \to R$ prawie wszędzie równych 0.

W zbiorze tym definiujemy działania:

$$(f + g)(x) = f(x) +_R g(x),$$

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{y \in G} f(x * y^{-1}) \cdot_R g(y).$$

$(R[G], +, \cdot)$ jest pierścieniem.

W dowolnym pierścieniu $(R, +, \cdot)$ wprowadzamy oznaczenia:

$$\begin{aligned} xy + z &= (x \cdot y) + z, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i &= x_1 + \ldots + x_n, \sum_{i=1}^{0} x_i = 0, \\ \prod_{i=1}^{n} x_i &= x_1 \cdot \ldots \cdot x_n, \prod_{i=1}^{0} x_i = 1. \end{aligned}$$

W szczególności $\sum_{i=1}^{n} x = nx$ oraz $\prod_{i=1}^{n} x = x^n$.

Twierdzenie

Niech $(R, +, \cdot)$ będzie pierścieniem przemiennym z jedynką.

1. $-(-x) = x$,
2. $-(x + y) = (-x) + (-y)$,
3. $n(mx) = nmx$,
4. $nx + mx = (n + m)x$,
5. $0x + x0 = 0$,
6. $(-1)x = -x$,
7. $(-x)y = -(xy) = x(-y)$,
8. $(-x)(-y) = xy$,
9. $x(y - z) = xy - xz$,
10. $(x - y)z = xz - yz$,
11. $x + z = y + z \Rightarrow x = y$,
12. $x^n x^m = x^{n+m}$,
13. $(x^n)^m = x^{nm}$,
14. $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

W dalszym ciągu tego wykładu pisząc “pierścień” będziemy na ogól mieli na myśli “pierścień przemienny z jedynką”.

Podpierścienie,
podpierścienie generowane przez zbiór.

Definicja

Niech $(R, +, \cdot)$ *będzie pierścieniem. Podzbiór* $P \neq \emptyset$ *zbioru* R *nazywamy* **podpierścieniem** *pierścienia* R *(piszemy* $P < R$*), gdy* $(P, +\restriction_{P\times P}, \cdot\restriction_{P\times P})$ *jest pierścieniem.*

Przykłady:

1. $\mathbb{Z} < \mathbb{R}$;
2. $\mathbb{R} < \mathbb{C}$;
3. $\mathbb{Z}_n$ nie jest podpierścieniem pierścienia $\mathbb{Z}$.

Twierdzenie

Niech $\varnothing \neq P \subset R$ *i niech* $(R, +, \cdot)$ *będzie pierścieniem. Następujące warunki są równoważne:*

1. $P < R$;
2. P *ma następujące własności:*
   - $1_R \in P$,
   - $\forall x, y \in P (x - y \in P)$,
   - $\forall x, y \in P (x \cdot y \in P)$.

Przykłady:

4. $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\} < \mathbb{R}$. Istotnie, $1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Ustalmy $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, to znaczy niech $x = x_1 + x_2\sqrt{2}$, $y = y_1 + y_2\sqrt{2}$. Wówczas:

$$\begin{aligned} x - y &= (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], \\ x \cdot y &= (x_1 y_1 + 2y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]. \end{aligned}$$

5. $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{m}{n} : NWD(m,n) = 1 \text{ oraz } p \neq n\} < \mathbb{Q}$, gdzie p jest liczbą pierwszą. Istotnie, $1 \in \mathbb{Z}_{(p)}$. Ustalmy $x, y \in \mathbb{Z}_{(p)}$, to znaczy niech $x = \frac{m_1}{n_1}$, $NWD(m_1, n_1) = 1$, $p \nmid n_1$, $y = \frac{m_2}{n_2}$, $NWD(m_2, n_2) = 1$, $p \nmid n_2$. Wówczas:

$$\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{n_1 n_2} \in \mathbb{Z}_{(p)},$$

bo $p \nmid n_1 n_2$ oraz $NWD(m_1 n_2 - m_2 n_1, n_1 n_2) = 1$,

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} \in \mathbb{Z}_{(p)},$$

bo $p \nmid n_1 n_2$ oraz $NWD(m_1 m_2, n_1 n_2) = 1$.

Pierścień $\mathbb{Z}_{(p)}$ nazywamy **pierścieniem liczb p-całkowitych.**

Twierdzenie

Niech $\mathcal{R} = \{R_i : i \in I\}$ *będzie rodziną podpierścieni pierścienia* R*;*

1. $\bigcap_{i\in I} R_i$ *jest podpierścieniem pierścienia* R*,*
2. $\bigcup_{i\in I} H_i$ *jest podpierścieniem pierścienia* R*, o ile* $\mathcal{R}$ *jest łańcuchem.*

Definicja

Niech $(R, +, \cdot)$ będzie pierścieniem oraz $A \subset R$ pewnym zbiorem. Najmniejszy w sensie inkluzji podpierścień pierścienia R zawierający zbiór A (tj. przekrój wszystkich podpierścieni pierścienia R zawierających A) nazywamy **podpierścieniem generowanym przez** *A i oznaczamy $[A]$.*

Uwaga

Niech $(R, +, \cdot)$ *będzie pierścieniem oraz* $P < R$. *Wówczas:*

1. $[P] = P$,
2. $[R] = R$.

Definicja

Każdy zbiór A o tej własności, że $[A] = R$ nazywamy **zbiorem generatorów** *pierścienia R. Jeśli $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ to oznaczamy*

$$[a_1, \ldots, a_n] = \langle A \rangle.$$

Mówimy, że pierścień jest **skończenie generowany**, *gdy istnieją elementy $a_1, \ldots, a_n \in R$ takie, że*

$$R = [a_1, \ldots, a_n].$$

Twierdzenie (o postaci elementów podpierścienia generowanego przez zbiór)

Niech $(R, +, \cdot)$ *będzie pierścieniem oraz* $A \subset R$ *pewnym zbiorem. Wówczas*

$$[A] = \{x : x \textit{ jest sumą elementów postaci } \pm a_1 \cdot \ldots \cdot a_k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in A$$

Definicja

Niech $(R, +, \cdot)$ *będzie pierścieniem oraz* $A \subset R$ *pewnym zbiorem. Niech ponadto* $P < R$*. Podpierścień generowany przez zbiór* $P \cup A$ *nazywamy* **podpierścieniem generowanym przez** A **nad** P *i oznaczamy* $P[A]$*.*
Jeżeli $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$*, to pierścień* $R[\{a_1, \ldots, a_n\}]$ *nazywamy* **podpierścieniem skończenie generowanym przez** A **nad** P *i oznaczamy* $P[a_1, \ldots, a_n]$*.*

Wniosek (o postaci elementów podpierścienia generowanego przez zbiór nad pierścieniem)

Niech $(R, +, \cdot)$ *będzie pierścieniem oraz* $A \subset R$ *pewnym zbiorem. Niech* $P < R$. *Wówczas*

$P[A] = \{x : x \text{ jest sumą elementów postaci } pa_1 \cdot \ldots \cdot a_k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in$

Wniosek

1. *Niech* $(R, +, \cdot)$ *będzie pierścieniem oraz niech* $a \in R$. *Niech* $P < R$. *Wówczas*

$$P[a] = \{x_0 + x_1 a + \ldots + x_n a^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, x_i \in P\}.$$

2. *Niech* $(R, +, \cdot)$ *będzie pierścieniem oraz niech* $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset R$. *Niech* $P < R$. *Wówczas*

$P[a_1, \ldots, a_n] = \{x : x$ *jest sumą elementów postaci* $pa_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{i_n}, i_1,$

Przykłady:

6. $\mathbb{Z}[i] = \{x_0 + x_1 i + x_2 i^2 + \ldots + x_n i^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, x_i \in \mathbb{Z}\} = \{u + iv : u, v \in \mathbb{Z}\}$. Pierścień ten nazywamy **pierścieniem Gaussa.**
7. $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{x_0 + x_1\sqrt{2} + x_2(\sqrt{2})^2 + \ldots + x_n(\sqrt{2})^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, x_i \in \mathbb{Z}\} = \{u + \sqrt{2}v : u, v \in \mathbb{Z}\}$.
8. $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] = \{x_0 + x_1\sqrt[3]{2} + x_2(\sqrt[3]{2})^2 + \ldots + x_n(\sqrt[3]{2})^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, x_i \in \mathbb{Z}\} = \{u + \sqrt[3]{2}v + \sqrt[3]{4}t : u, v, t \in \mathbb{Z}\}$.

Specjalne typy elementów pierścienia.

Definicja

Niech $(R, +, \cdot)$ *będzie pierścieniem.*

1. *Element* $x \in R$ *taki, że*

$$\exists y \in R \backslash \{0\} x \cdot y = 0$$

   nazywamy **dzielnikiem zera.** *Zbiór wszystkich dzielników zera oznaczamy przez* $\mathcal{D}(R)$.

2. *Element* $x \in R$ *taki, który nie jest dzielnikiem zera, nazywamy* **elementem regularnym.**

Przykłady:

1. Niech $(R, +, \cdot)$ będzie pierścieniem. Wówczas 0 jest dzielnikiem zera, nazywamy je **niewłaściwym** dzielnikiem zera. Wszystkie pozostałe dzielniki zera nazywać będziemy **właściwymi.**
2. Rozważmy pierścień $\mathbb{Z}_6$. Wówczas 0, 2, 3, 4 są dzielnikami zera.
3. Rozważmy pierścień $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Wówczas $(1, 0)$ i $(0, 1)$ są dzielnikami zera.

Twierdzenie

Niech $(R, +, \cdot)$ *będzie pierścieniem, niech* $x, y \in R$. *Wówczas:*

1. $xy = 0 \Rightarrow x \in \mathcal{D}(R) \vee y \in \mathcal{D}(R)$;
2. *jeśli* x *jest regularny, to*

$$xy = 0 \Rightarrow y = 0;$$

3. *jeśli* x *jest regularny, to*

$$xy = xz \Rightarrow y = z.$$

Przykład:

4. Rozważmy pierścień $\mathbb{Z}_6$. Wówczas $3 \cdot 2 = 3 \cdot 4$, ale $2 \neq 4$.

Definicja

Pierścień bez właściwych dzielników zera nazywamy **pierścieniem całkowitym** *(lub* **dziedziną całkowitosci,** *lub* **dziedziną***).*

Przykłady:

5. $\mathbb{Z}$;
6. $\mathbb{Z}[i]$;
7. $\mathbb{Z}_5$.

Uwaga

Podpierścień pierścienia całkowitego jest pierścieniem całkowitym.

Definicja

Niech $(R, +, \cdot)$ *będzie pierścieniem. Element* $x \in R$ *nazywamy* **elementem odwracalnym,** *gdy*

$$\exists y \in R(x \cdot y = 1_R).$$

Zbiór wszystkich elementów odwracalnych oznaczamy przez $U(R)$.

Twierdzenie

Niech $(R, +, \cdot)$ będzie pierścieniem. Wówczas:

1. *zbiór elementów regularnych jest zamknięty na mnożenie;*
2. *każdy element odwracalny jest regularny;*
3. *$U(R)$ jest grupą abelową, nazywamy ją* **grupą elementów odwracalnych** *pierścienia R.*

Dowód:

1. Niech $x, y \in R$ będą elementami regularnymi. Przypuśćmy, że $xy \in \mathcal{D}(R)$, a więc załóżmy, że istnieje $z \in R\backslash\{0\}$ taki, że $(xy)z = 0$. Wówczas również $x(yz) = 0$ i ponieważ x jest regularny, więc $yz = 0$. Zatem $y \in \mathcal{D}(R)$, co daje sprzeczność.

2. Ustalmy $x \in U(R)$ i przypuśćmy, że $x \in \mathcal{D}(R)$, a więc załóżmy, że istnieje $z \in R\backslash\{0\}$ taki, że $xz = 0$. Z drugiej strony istnieje $y \in R$ taki, że $xy = 1$, a zatem

$$0 = 0z = (xz)y = xyz = 1y = y$$

co daje sprzeczność.

3. Wystarczy pokazać, że zbiór elementów odwracalnych jest zamknięty na mnożenie. Ustalmy $x, y \in U(R)$. Wówczas istnieją $z, t \in R$ takie, że $xz = 1$ oraz $yt = 1$. Zatem:

$$1 = 1 \cdot 1 = xzyt = (xy)(zt),$$

więc $xy \in U(R)$. $\square$

Przykłady:

8. $\mathbb{Z}$, $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$;
9. $\mathbb{Z}_6$, $U(\mathbb{Z}_6) = \{1, 5\}$;
10. $\mathbb{Z}_5$, $U(\mathbb{Z}_5) = \{1, 2, 3, 4\} = \mathbb{Z}_5^*$;
11. $\mathbb{Q}$, $U(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^*$;
12. $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $(2, 3) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Uwaga

Niech $(R, +, \cdot)$ będzie pierścieniem. Wówczas:

1. *R jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy $U(R) = R^*$;*
2. *jeśli R jest ciałem, to R jest pierścieniem całkowitym;*
3. *jeśli R jest ciałem i $P < R$, to P jest pierścieniem całkowitym.*

Przykład:

13. Rozważmy $\mathbb{Z} < \mathbb{Q}$. Wówczas $\mathbb{Z}$ jest pierścieniem całkowitym, ale $\mathbb{Z}$ nie jest ciałem.

Uwaga

Niech R_1, R_2 będą pierścieniami. Wówczas:

1. $U(R_1 \times R_2) = U(R_1) \times U(R_2)$;
2. $\mathcal{D}(R_1 \times R_2) = R_1 \times \mathcal{D}(R_2) \cup \mathcal{D}(R_1) \times R_2$.

Twierdzenie

Niech $(R, +, \cdot)$ będzie pierścieniem skończonym. Następujące warunki są równoważne:

1. *x jest elementem odwracalnym;*
2. *x jest elementem regularnym;*
3. *istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $x^m = 1$.*

Dowód:

(1) $\Rightarrow$ (3): ustalmy $x \in U(R)$. R jest skończony, więc $U(R)$ jest skończona, powiedzmy $|U(R)| = m$. Wówczas $x^m = 1$.

(3) $\Rightarrow$ (2): ustalmy $x \in R$ i niech $x^m = 1$, dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Jeżeli $m = 1$, to $x = 1$ i w szczególności x jest regularny. Jeśli $m > 1$, to wówczas

$$1 = x^m = x^{m-1}x,$$

a zatem $x \in U(R)$ i tym samym x jest regularny.

(2) $\Rightarrow$ (1): ustalmy $x \in R$ i niech x będzie regularny.
Zdefiniujmy odwzorowanie $f_x : R \to R$ wzorem

$$f_x(y) = xy.$$

Pokażemy, że f_x jest różnowartościowe. W tym celu ustalmy $y, z \in R$ i załóżmy, że $f_x(y) = f_x(z)$. Wówczas $xy = xz$ i ponieważ x jest regularny, więc $y = z$.
Ponieważ R jest skończony, więc f_x jest też surjektywne. W szczególności

$$\exists y \in R[f_x(y) = 1],$$

a więc dla pewnego $y \in R$ zachodzi $xy = 1$. Zatem $x \in U(R)$.

Wniosek

Niech $(R, +, \cdot)$ będzie pierścieniem skończonym. Wówczas:

1. $R = U(R) \cup \mathcal{D}(R)$ *oraz* $U(R) \cap \mathcal{D}(R) = \varnothing$;
2. R *jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy* R *jest pierścieniem całkowitym.*

Uwaga

Niech $n > 1$. *Wówczas:*

1. $\mathcal{D}(\mathbb{Z}_n) = \{k \in \mathbb{Z}_n : NWD(k, n) > 1\}$;
2. $U(\mathbb{Z}_n) = \{k \in \mathbb{Z}_n : NWD(k, n) = 1\}$.

Wniosek

Niech $n > 1$. Następujące warunki są równoważne:

1. *$\mathbb{Z}_n$ jest pierścieniem całkowitym;*
2. *$\mathbb{Z}_n$ jest ciałem;*
3. *n jest liczbą pierwszą.*

Definicja

Niech $(R, +, \cdot)$ będzie pierścieniem. Wówczas:

1. *element $x \in R$ nazywamy* **nilpotentnym** *(lub* **nilpotentem***), gdy*

$$\exists n \in \mathbb{N}(x^n = 0),$$

   a zbiór wszystkich elementów nilpotentnych pierścienia R oznaczamy przez $Nil(R)$;

2. *element $x \in R$ nazywamy* **idempotentnym** *(lub* **idempotentem***), gdy*

$$x^2 = x;$$

3. *elementy idempotentne $x, y \in R$ nazywamy* **idempotentami ortogonalnymi,** *gdy:*

$$x + y = 1 \text{ oraz } xy = 0.$$

Uwaga

Niech $(R, +, \cdot)$ będzie pierścieniem. Wówczas:

1. *każdy element nilpotentny jest dzielnikiem zera;*
2. *każdy element idempotentny różny od 1 jest dzielnikiem zera.*

Dowód.

Część (1) jest oczywista, a dla dowodu części (2) zauważmy, że

$$x(x-1) = x^2 - x = x - x = 0.$$

□

Przykłady:

14. Rozważmy dowolny pierścień R. Wówczas 0 jest nilpotentem, nazywamy go **nilpotentem trywialnym.**
15. Rozważmy pierścień $\mathbb{Z}_6$. Wówczas 0 jest jedynym nilpotentem.
16. Rozważmy dowolny pierścień R. Wówczas 0 i 1 są idempotentami, nazywamy je **idempotentami trywialnymi.**
17. Rozważmy pierścień $\mathbb{Z}_6$. Wówczas 0, 1, 3, 4 są idempotentami.
18. Rozważmy pierścień $\mathbb{Z}_{10}$. Wówczas 5 i 6 są idempotentami ortogonalnymi.