

Grupy permutacji.

Twierdzenie (Cayley'a)

Dowolna grupa G jest izomorficzna z pewną podgrupą grupy przekształceń $S(G)$.

Dowód.

Zdefiniujmy odwzorowanie $\Phi : G \rightarrow S(G)$ wzorem $\Phi(a) = \lambda_a$, gdzie $\lambda_a : G \rightarrow G$ jest przesunięciem lewostronnym.

Φ jest dobrze określonym homomorfizmem.

Pokażemy, że Φ jest monomorfizmem.

Ustalmy w tym celu $a \in \ker \Phi$.

Wówczas:

$$\Phi(a) = id_G \Leftrightarrow \lambda_a = id_G \Leftrightarrow \forall b \in G (ab = b) \Leftrightarrow a = 1_G.$$

Ponadto, oczywiście, $\text{im } \Phi < S(G)$, a zatem $G \cong \text{im } \Phi < S(G)$.



Uwaga

Niech X i Y będą zbiorami równolicznymi. Wówczas $S(X) \cong S(Y)$.

Dowód:

Niech $f : X \rightarrow Y$ będzie bijekcją ustalającą równoliczność.

Zdefiniujmy odwzorowanie $\Psi : S(X) \rightarrow S(Y)$ wzorem

$$\Psi(\sigma) = f \circ \sigma \circ f^{-1}.$$

Pokażemy, że Ψ jest homomorfizmem.

Ustalmy w tym celu $\sigma_1, \sigma_2 \in S(X)$.

Wówczas

$$\begin{aligned}\psi(\sigma_1 \circ \sigma_2) &= f \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ f^{-1} = f \circ \sigma_1 \circ f^{-1} \circ f \circ \sigma_2 \circ f^{-1} \\ &= \psi(\sigma_1) \circ \psi(\sigma_2).\end{aligned}$$

Pokażemy, że ψ jest surjektywne.

Ustalmy w tym celu $\tau \in S(Y)$.

Wówczas

$$\tau = f \circ f^{-1} \circ \tau \circ f \circ f^{-1} = \psi(f^{-1} \circ \tau \circ f).$$

Pokażemy, że ψ jest różnowartościowe.

Ustalmy w tym celu $\sigma \in \ker \psi$.

Wówczas

$$\sigma \in \ker \psi \Leftrightarrow \psi(\sigma) = id_Y \Leftrightarrow f \circ \sigma \circ f^{-1} = id_Y \Leftrightarrow \sigma = id_X.$$

Wniosek

Dowolna grupa n -elementowa G jest izomorficzna z pewną podgrupą grupy permutacji $S(n)$.

Dowód.

Ustalmy grupę G i niech $|G| = n$.

Wówczas G jest równoliczna z $\{1, \dots, n\}$, zatem $S(G) \cong S(n)$. □

Wniosek

Dla ustalonej liczby n istnieje skończona liczba grup parami nieizomorficznych rzędu n .

Definicja:

Niech $\sigma \in S(n)$.

1. Zbiór

$$\text{supp}(\sigma) = \{a \in \{1, \dots, n\} : \sigma(a) \neq a\}$$

nazywamy **nośnikiem** permutacji σ .

2. Mówimy, że permutacje $\sigma_1, \sigma_2 \in S(n)$ są **rozłączne** (lub **niezależne**), gdy

$$\text{supp}(\sigma_1) \cap \text{supp}(\sigma_2) = \emptyset.$$

3. Permutację $\sigma \in S(n)$ nazywamy **cyklem** o długości k , gdy istnieje podzbiór $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ taki, że

$$\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \dots, \sigma(a_{k-1}) = a_k, \sigma(a_k) = a_1$$

oraz

$$\sigma(i) = i, \text{ dla } i \in \{1, \dots, n\} \setminus A.$$

Cykl taki zapisujemy jako

$$\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_k).$$

Przyjmujemy ponadto, że $id_{\{1, \dots, n\}}$ jest cyklem o długości 1 i oznaczamy go jako (1).

4. Cykl o długości 2 nazywamy **transpozycją**.

Przykłady:

1. Rozważmy $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. Wówczas:

$$\text{supp}(\sigma) = \{1, 3, 4, 5, 6\}.$$

2. Rozważmy $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.
Wówczas σ_1 i σ_2 są permutacjami rozłącznymi.

3. Rozważmy $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Wówczas σ jest cyklem:

$$\sigma = (1, 3, 2, 5, 4).$$

4. Rozważmy $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Wówczas σ jest transpozycją:

$$\sigma = (1, 2).$$

Uwaga

Niech $S(n)$ będzie grupą permutacji.

1. Jeśli $\sigma \in S(n)$ i $a \in \text{supp}(\sigma)$, to $\sigma(a) \in \text{supp}(\sigma)$.
2. Jeśli $\sigma \in S(n)$ i $k \in \mathbb{N}$, to $\text{supp}(\sigma^k) \subset \text{supp}(\sigma)$.
3. Jeśli $\sigma \in S(n)$, to $\text{supp}(\sigma^{-1}) \subset \text{supp}(\sigma)$.
4. Jeśli $\sigma, \tau \in S(n)$ i $\text{supp}(\sigma) \cap \text{supp}(\tau) = \emptyset$, to $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$.

Dowód:

1. Ustalmy $\sigma \in S(n)$ i $a \in \text{supp}(\sigma)$.

Wówczas $\sigma(a) \neq a$ i ponieważ σ jest bijekcją, to $\sigma(\sigma(a)) \neq \sigma(a)$, czyli $\sigma(a) \in \text{supp}(\sigma)$.

2. Ustalmy $\sigma \in S(n)$ i $k \in \mathbb{N}$.

Ustalmy $a \in \text{supp}(\sigma^k)$.

Wówczas $\sigma^k(a) \neq a$.

Przypuśćmy nie wprost, że $\sigma(a) = a$.

Wówczas:

$$\begin{aligned}\sigma(a) &= a \\ \sigma^2(a) &= \sigma(a) = a \\ \sigma^3(a) &= \sigma^2(a) = \sigma(a) = a \\ &\vdots \\ \sigma^k(a) &= \dots = a\end{aligned}$$

3. Ustalmy $\sigma \in S(n)$ i $a \in \text{supp}(\sigma^{-1})$.

Wówczas $\sigma^{-1}(a) \neq a$.

Niech $\sigma^{-1}(a) = b$, $b \neq a$.

Wówczas $a = \sigma(b)$ i ponieważ σ jest bijekcją, więc $\sigma(a) \neq \sigma(b)$, czyli $a \neq \sigma(a)$.

4. Ustalmy $\sigma, \tau \in S(n)$ i niech $\text{supp}(\sigma) \cap \text{supp}(\tau) = \emptyset$.

Ustalmy $a \in \{1, \dots, n\}$ i rozważmy kilka przypadków.

- ▶ Niech $a \notin \text{supp}(\sigma) \cup \text{supp}(\tau)$.

Wówczas $\sigma(a) = a$, $\tau(a) = a$, więc $\sigma \circ \tau(a) = \tau \circ \sigma(a)$.

- ▶ Niech $a \in \text{supp}(\sigma)$.

Wówczas $\sigma(a) \in \text{supp}(\sigma)$.

Dalej, $\sigma(a) \notin \text{supp}(\tau)$ oraz $a \notin \text{supp}(\tau)$.

Zatem $\sigma \circ \tau(a) = \sigma(a) = \tau(\sigma(a)) = \tau \circ \sigma(a)$.

- ▶ Niech $a \in \text{supp}(\tau)$.

Rozumowanie prowadzimy analogicznie.

Uwaga

Niech $S(n)$ będzie grupą permutacji.

1. Jeśli $\sigma \in S(n)$ oraz $\sigma = (a_1, \dots, a_k)$, to $\text{supp}(\sigma) = \{a_1, \dots, a_k\}$.
2. Jeśli $\sigma \in S(n)$ oraz $\sigma = (a_1, \dots, a_k)$, to

$$\sigma = (a_2, \dots, a_1, a_1) = (a_3, \dots, a_1, a_2) = \dots = (a_k, \dots, a_{k-2}, a_{k-1}).$$

3. Jeśli $\sigma \in S(n)$ oraz $\sigma = (a_1, \dots, a_k)$, to

$$\sigma^{-1} = (a_k, \dots, a_1).$$

Uwaga

Niech $S(n)$ będzie grupą permutacji.

1. Dla $i, j \in \{1, \dots, n\}$ zachodzi $(i, j)^2 = (i, j) \circ (i, j) = (1)$.
2. Dla $i, j \in \{1, \dots, n\}$ zachodzi $(i, j) = (j, i)$.
3. Dla $i, j \in \{1, \dots, n\}$ zachodzi $(i, j) = (1, i) \circ (1, j) \circ (1, i)$.

Twierdzenie

Każda permutacja $\sigma \in S(n)$ da się przedstawić w postaci iloczynu cykli parami rozłącznych. Przedstawienie to jest jednoznaczne z dokładnością do kolejności cykli.

Dowód:

Pokażemy istnienie stosownego rozkładu.

Niech $m = |\text{supp}(\sigma)|$.

Dowód poprowadzimy przez indukcję względem m .

Jeżeli $m = 0$, to wówczas

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

a zatem $\sigma = (1)$.

Jeżeli $m \geq 2$, to założmy, że każda permutacja $\sigma \in S(n)$ taka, że

$$|\text{supp}(\sigma)| < m$$

daje się rozłożyć na iloczyn cykli parami rozłącznych.

Ustalmy permutację $\sigma \in S(n)$ taką, że

$$|\text{supp}(\sigma)| = m.$$

Pokażemy, że σ daje się rozłożyć na iloczyn cykli parami rozłącznych.

Ustalmy w tym celu $a_1 \in \text{supp}(\sigma)$ i rozważmy ciąg

$$b_1 = a_1, b_2 = \sigma(b_1), b_3 = \sigma(b_2), \dots$$

Oczywiście

$$\forall p \in \mathbb{N} (b_p \in \{1, \dots, n\}),$$

a zatem

$$\exists p_1, p_2 \in \mathbb{N} (b_{p_1} = b_{p_2}).$$

Wobec tego niech

$$k = \min\{p \in \mathbb{N} : b_{p+1} = b_s, \text{ dla pewnego } s \in \{1, \dots, p\}\}.$$

Pokażemy, że $s = 1$.

Przypuśćmy bowiem, że $s > 1$.

Wówczas w szczególności:

$$b_{k+1} = b_s \text{ dla pewnego } s \in \{2, \dots, k\}$$

i zgodnie z określeniem ciągu $(b_1, b_2, \dots)$:

$$\sigma(b_k) = b_{k+1} = b_s = \sigma(b_{s-1}),$$

ale ponieważ σ jest bijekcją, więc

$$b_k = b_{s-1}$$

czyli

$$b_{(k-1)+1} = b_{s-1} \text{ oraz } s-1 \in \{1, \dots, k-1\}.$$

Wszelako k było najmniejszą liczbą o powyższej własności, co daje sprzeczność.

Wobec tego liczby

$$b_1 = a_1, b_2 = \sigma(b_1), b_3 = \sigma(b_2), \dots, b_k = \sigma(b_{k-1})$$

są parami różne oraz

$$b_{k+1} = b_1.$$

Mamy więc

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_k \\ b_2 & b_3 & \dots & b_1 \end{pmatrix} \\ &\circ \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{m-k} \\ \sigma(c_1) & \sigma(c_2) & \dots & \sigma(c_{m-k}) \end{pmatrix}}_{=\tau} \\ &= (b_1, \dots, b_k) \circ \tau.\end{aligned}$$

Jeśli $m = k$, to $\sigma = (b_1, \dots, b_m)$ jest cyklem.

Jeśli $m > k$, to $|\text{supp}(\tau)| = m - k < m$, więc na podstawie założenia indukcyjnego

$$\tau = \gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_l,$$

gdzie γ_i , $i \in \{1, \dots, l\}$ są cyklami rozłącznymi.

Wobec tego

$$\sigma = (b_1, \dots, b_k) \circ \gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_l$$

oraz

$$\forall i \in \{1, \dots, l\} (\text{supp}(\gamma_i) \cap \text{supp}(b_1, \dots, b_k) = \emptyset).$$

Pokażemy jednoznaczność (z dokładnością do kolejności) stosownego rozkładu.

Niech

$$\sigma = \gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_{l_1} = \gamma'_1 \circ \dots \circ \gamma'_{l_2},$$

gdzie $\gamma_1, \dots, \gamma_{l_1}, \gamma'_1, \dots, \gamma'_{l_2}$ są cyklami oraz

$$\forall i, j \in \{1, \dots, l_1\} (\text{supp}(\gamma_i) \cap \text{supp}(\gamma_j) = \emptyset),$$

$$\forall i, j \in \{1, \dots, l_2\} (\text{supp}(\gamma'_i) \cap \text{supp}(\gamma'_j) = \emptyset).$$

Przypuśćmy, że

$$\forall i \in \{1, \dots, l_2\} (\gamma_1 \neq \gamma'_i).$$

Ustalmy $a_1 \in \text{supp}(\gamma_1) \subset \text{supp}(\sigma)$.

Dla pewnego $i \in \{1, \dots, l_2\}$

$$a_1 \in \text{supp}(\gamma'_i)$$

i możemy – zmieniając ewentualnie numerację – założyć, że

$$a_1 \in \text{supp}(\gamma'_1).$$

Wobec tego:

$$\gamma_1 = (a_1, a_2, \dots, a_{k_1}),$$

$$\gamma'_1 = (a_1, a'_2, \dots, a'_{k_2}).$$

Ale ponieważ σ jest bijekcją, więc:

$$a'_2 = \sigma(a_1) = a_2,$$

$$a'_3 = \sigma(a_2) = a_3,$$

$$\vdots$$

zatem $\gamma_1 = \gamma'_1$, co jest sprzecznością.

Przykłady:

5. Rozważmy $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} \in S(8)$.

Wówczas:

$$\sigma = (1, 3, 2) \circ (4, 6, 5) \circ (7, 8).$$

6. Rozważmy $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 6 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} \in S(8)$.

Wówczas:

$$\sigma = (1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 4).$$

Wniosek

Grupa $S(n)$ jest generowana przez zbiór wszystkich cykli.

Uwaga

Rząd cykli o długości k w grupie $S(n)$ jest równy k .

Dowód.

Ustalmy $\gamma_1 = (a_1, a_2, \dots, a_k) \in S(n)$.

Wówczas:

$$\gamma^k = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{pmatrix} = (1).$$

Ustalmy $i \in \{1, \dots, k-1\}$.

Wówczas:

$$\gamma^i(a_1) = a_{i+1}$$

ale $i+1 \in \{2, \dots, k\}$, więc

$$\gamma^i(a_1) \neq a_1.$$



Twierdzenie (Ruffiniego)

Jeżeli $\sigma \in S(n)$ ma następujący rozkład na cykle rozłączne:

$$\sigma = \gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_m$$

o długościach, odpowiednio, $k_1, \dots, k_m$, to wówczas

$$r(\sigma) = NWW(k_1, \dots, k_m).$$

Dowód:

Ustalmy σ o rozkładzie jak w twierdzeniu.

Niech $r(\sigma) = r$.

Oznaczmy:

$$w = NWW(k_1, \dots, k_m)$$

oraz dobierzmy liczby naturalne $t_1, \dots, t_m$ tak, aby

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} w = k_i t_i.$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\sigma^w &= (\gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_m)^w \\ &= \gamma_1^w \circ \dots \circ \gamma_m^w = \gamma_1^{k_1 t_1} \circ \dots \circ \gamma_m^{k_m t_m} \\ &= (\gamma_1^{k_1})^{t_1} \circ \dots \circ (\gamma_m^{k_m})^{t_m} = (1).\end{aligned}$$

Wobec tego $r|w$.

Z drugiej strony:

$$(1) = \sigma^r = (\gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_m)^r = \gamma_1^r \circ \dots \circ \gamma_m^r$$

oraz $\gamma_1^r, \dots, \gamma_m^r$ są cyklami parami rozłącznymi.

Zatem:

$$\gamma_1^r = (1), \dots, \gamma_m^r = (1),$$

skąd $k_1 | r, \dots, k_m | r$.

Wobec tego $w | r$.

Przykład:

7. Rozważmy $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 7 & 5 & 6 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix} \in S(9)$.

Wówczas:

$$\sigma = (1, 2, 3) \circ (4, 7) \circ (8, 9),$$

a zatem $r(\sigma) = NWW(3, 2, 2) = 6$.

Uwaga

Każdy cykl jest iloczynem transpozycji.

Dowód.

Wystarczy zauważyć, że

$$(a_1, \dots, a_k) = (a_1, a_k) \circ (a_1, a_{k-1}) \circ \dots \circ (a_1, a_2).$$



Wniosek

1. Każda permutacja $\sigma \in S(n)$ jest iloczynem transpozycji.
2. Grupa $S(n)$ jest generowana przez zbiór wszystkich transpozycji.
3. Grupa $S(n)$ jest generowana przez zbiór

$$\{(1, 2), (1, 3), \dots, (1, n)\}.$$

Przykłady:

8. Rozważmy $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 2 & 3 & 8 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in S(8)$.

Wówczas:

$$\begin{aligned}\sigma &= (1, 6, 7) \circ (2, 4, 3) \circ (5, 8) \\ &= (1, 7) \circ (1, 6) \circ (2, 3) \circ (2, 4) \circ (5, 8).\end{aligned}$$

9. Rozważmy $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S(3)$. Wówczas:

$$\begin{aligned}\sigma &= (1, 2, 3) = (1, 3) \circ (1, 2) \\ &= (1, 3) \circ (1, 2) \circ (1, 2) \circ (1, 2).\end{aligned}$$

W szczególności rozkład permutacji na transpozycje nie jest jednoznaczny.

Lemat

Niech $\sigma \in S(n)$ oraz $c_1, \dots, c_k \in \{1, \dots, n\}$. Niech

$$\sigma = (1, c_1) \circ \dots \circ (1, c_k).$$

Jeśli $\sigma(s) = s$ dla pewnego $s \in \{1, \dots, n\}$, to element s występuje w ciągu $c_1, \dots, c_k$ parzystą liczbę razy.

Dowód:

Jeśli $s \neq c_i$, dla $i \in \{1, \dots, k\}$, to s występuje w ciągu 0 razy.

Założmy więc, że $s = c_i$, dla pewnego $i \in \{1, \dots, k\}$.

Dowód prowadzimy metodą indukcji po k .

Założmy, że dla wszelkich $p \in \{1, \dots, k-1\}$, jeżeli

$c_1, \dots, c_p \in \{1, \dots, n\}$ oraz

$$\sigma = (1, c_1) \circ \dots \circ (1, c_p),$$

i jeśli $\sigma(s) = s$, dla pewnego $s \in \{1, \dots, n\}$, to element s występuje w ciągu $c_1, \dots, c_p$ parzystą liczbę razy.

Niech

$$l = \max\{i \in \{1, \dots, k\} : s = c_i\}.$$

Ponadto oznaczmy

$$\tau_i = (1, c_i), \text{ dla } i \in \{1, \dots, k\}.$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\tau_l \circ \tau_{l+1} \circ \dots \circ \tau_k(s) &= 1 \neq s, \\ \tau_1 \circ \dots \circ \tau_l \circ \tau_{l+1} \circ \dots \circ \tau_k(s) &= \sigma(s) = s.\end{aligned}$$

a zatem

$$\tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_{l-1}(s) \neq s.$$

Wobec tego

$$\exists i \in \{1, \dots, l-1\} (s = c_i.)$$

Niech

$$m = \max\{i \in \{1, \dots, l-1\} : s = c_i\}.$$

Wówczas

$$\tau_m \circ \tau_{m+1} \circ \dots \circ \tau_l \circ \tau_{l+1} \circ \dots \circ \tau_k(s) = s,$$

$$\tau_1 \circ \dots \circ \tau_m \circ \tau_{m+1} \circ \dots \circ \tau_l \circ \tau_{l+1} \circ \dots \circ \tau_k(s) = \sigma(s) = s,$$

a zatem

$$\tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_{m-1}(s) = s.$$

Tym samym w ciągu

$$c_m, \dots, c_l, \dots, c_k$$

s występuje dwa razy oraz

$$\tau_1 \circ \dots \circ \tau_{m-1} = (1, c_1) \circ \dots \circ (1, c_{m-1}),$$

przy czym $m - 1 \in \{1, \dots, k - 1\}$ i skoro $\tau_1 \circ \dots \circ \tau_{m-1}(s) = s$,
to na podstawie założenia indukcyjnego w ciągu

$$c_1, \dots, c_{m-1}$$

s występuje parzystą liczbę razy.

Tym samym w ciągu

$$c_1, \dots, c_k$$

s występuje parzystą liczbę razy.

Lemat

Niech $\sigma \in S(n)$. Jeśli

$$\sigma = (a_1, b_1) \circ \dots \circ (a_k, b_k) = (1),$$

gdzie $a_i \neq b_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$, to k jest liczbą parzystą.

Dowód:

Ponieważ

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} [(a_i, b_i) = (1, a_i) \circ (1, b_i) \circ (1, a_i)],$$

więc

$$\sigma = (1, a_1) \circ (1, b_1) \circ (1, a_1) \circ \dots \circ (1, a_k) \circ (1, b_k) \circ (1, a_k) = (1).$$

Stąd w szczególności

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} [\sigma(b_i) = b_i.]$$

i tym samym element b_i , dla $i \in \{1, \dots, k\}$, pojawia się w ciągu

$$a_1, b_1, a_1, a_2, b_2, a_2, \dots, a_k, b_k, a_k$$

parzystą liczbę razy, a więc element b_i pojawia się w ciągu

$$b_1, b_2, \dots, b_k$$

parzystą liczbę razy.

Zatem k jest liczbą parzystą.

Twierdzenie

Niech $\sigma \in S(n)$ oraz

$$\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k = \tau'_1 \circ \dots \circ \tau'_l,$$

gdzie $\tau_1, \dots, \tau_k, \tau'_1, \dots, \tau'_l$ są transpozycjami. Wówczas

$$k \equiv l \pmod{2}.$$

Dowód.

Wobec równości

$$\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k = \tau'_1 \circ \dots \circ \tau'_l$$

mamy

$$\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k \circ \tau_l'^{-1} \circ \dots \circ \tau_1'^{-1} = (1).$$

Wobec drugiego z lematów liczba

$$k + l$$

jest parzysta, a zatem $k \equiv l \pmod{2}$.



Definicja

Niech $\sigma \in S(n)$ oraz niech σ ma następujący rozkład na transpozycje:

$$\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_m.$$

1. Liczbę $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^m$ nazywamy **znakiem** permutacji σ .
2. Permutację σ nazywamy **parzystą**, jeśli $\text{sgn}(\sigma) = 1$, a więc gdy jest iloczynem parzystej liczby transpozycji i **nieparzystą** w przeciwnym wypadku.

Uwaga

1. *Cykl o długości k jest permutacją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy k jest liczbą nieparzystą.*
2. *Niech $\sigma \in S(n)$ i niech σ ma następujący rozkład na cykle rozłączne:*

$$\sigma = \gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_l,$$

*przy czym niech k_i będzie długością cyklu γ_i , $i \in \{1, \dots, l\}$.
Wówczas permutacja σ jest parzysta wtedy i tylko wtedy,
gdy wśród liczb $k_1, \dots, k_l$ występuje parzysta liczba liczb
parzystych.*

Dowód.

1. Wynika wprost z tożsamości

$$(a_1, \dots, a_k) = (a_1, a_k) \circ (a_1, a_{k-1}) \circ \dots \circ (a_1, a_2).$$

2. Oczywiście wobec (1).



Przykłady:

10. Rozważmy $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 2 & 3 & 8 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in S(8)$.

Wówczas:

$$\begin{aligned}\sigma &= (1, 6, 7) \circ (2, 4, 3) \circ (5, 8) \\ &= (1, 7) \circ (1, 6) \circ (2, 3) \circ (2, 4) \circ (5, 8),\end{aligned}$$

więc σ jest permutacją nieparzystą.

Twierdzenie

Niech $\sigma \in S(n)$. Rozważmy wielomiany:

$$\begin{aligned}f(x_1, \dots, x_n) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j), \\f^\sigma(x_1, \dots, x_n) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}).\end{aligned}$$

Wówczas σ jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy $f = f^\sigma$ oraz σ jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy $f = -f^\sigma$.

Dowód:

Wielomiany f i f^σ różnią się co najwyżej znakiem, więc wystarczy pokazać, że σ jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy $f = f^\sigma$.

W tym celu zauważmy, że σ jest iloczynem stałej co do parzystości liczby transpozycji $\tau_1, \dots, \tau_k$ oraz że iloczyn dwóch permutacji jednakowej parzystości jest permutacją parzystą, zaś iloczyn dwóch permutacji różnych parzystości jest permutacją nieparzystą.

Zarazem:

- ▶ jeśli $f = f^{\sigma_1}$ i $f = f^{\sigma_2}$, to $f = f^{\sigma_1 \circ \sigma_2}$,
- ▶ jeśli $f = -f^{\sigma_1}$ i $f = -f^{\sigma_2}$, to $f = f^{\sigma_1 \circ \sigma_2}$,
- ▶ jeśli $f = f^{\sigma_1}$ i $f = -f^{\sigma_2}$, to $f = -f^{\sigma_1 \circ \sigma_2}$.

Wobec tego wystarczy pokazać, że jeśli τ jest transpozycją, to $f = -f^\tau$.

Pokażemy najpierw, że jeśli $\tau = (k, k + 1)$, gdzie $k \in \{1, \dots, n - 1\}$, to $f = -f^\tau$.

Istotnie:

$$f^\tau(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\tau(i)} - x_{\tau(j)}).$$

Tylko jeden czynnik $(x_{\tau(i)} - x_{\tau(j)})$ w iloczynie $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\tau(i)} - x_{\tau(j)})$ spełnia $\tau(i) > \tau(j)$, a mianowicie

$$(x_{\tau(k)} - x_{\tau(k+1)}) = (x_{k+1} - x_k).$$

Zmieniając znak tego czynnika na przeciwny otrzymujemy f , a zatem $f = -f^\tau$.

Dalej, dla dowolnej transpozycji $\tau = (m, r)$, $1 \leq m < r \leq n$, zachodzi:

$$\begin{aligned}(m, r) &= (m, m+1) \circ (m+1, m+2) \circ \dots \\ &\quad \circ (r-2, r-1) \circ (r-1, r) \circ (r-2, r-1) \circ \dots \\ &\quad \circ (m+1, m+2) \circ (m, m+1).\end{aligned}$$

Zatem dowolna transpozycja jest iloczynem $2(r-m)-1$ transpozycji postaci $(k, k+1)$, przy czym liczba $2(r-m)-1$ jest nieparzysta, co kończy dowód.

Uwaga

*Odwzorowanie $\text{sgn} : S(n) \rightarrow \{-1, 1\}$ jest homomorfizmem grup.
Jego jądrem jest zbiór wszystkich permutacji parzystych.*

Definicja

Podgrupę $A(n)$ grupy $S(n)$ złożoną ze wszystkich permutacji parzystych zwiemy **grupą alternującą** stopnia n .

Wniosek

Niech $n \geq 2$. Wówczas:

1. $A(n) \triangleleft S(n)$;
2. $S(n)/A(n) \cong \{-1, 1\} \cong \mathbb{Z}_2$;
3. $|A(n)| = \frac{n!}{2}$.

Twierdzenie

Niech $n \geq 2$. Wówczas:

1. grupa $A(n)$ jest generowana przez zbiór wszystkich permutacji będących iloczynem dwóch transpozycji;
2. grupa $A(n)$ jest generowana przez zbiór wszystkich cykli o długości 3;
3. grupa $A(n)$ jest generowana przez zbiór:

$$\{(1, 2, 3), (1, 2, 4), \dots, (1, 2, n)\};$$

4. grupa $A(n)$ jest generowana przez zbiór:

$$\{(1, i, j) : i, j \in \{2, \dots, n\}, i \neq j\}.$$

Dowód.

1. Oczywiste.
2. Wystarczy zauważyć, że dla parami różnych $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned}(i, j) \circ (i, j) &= (1), \\(i, j) \circ (i, k) &= (i, k, j), \\(i, j) \circ (k, l) &= (j, k, l) \circ (i, l, j).\end{aligned}$$

3. Oczywiste wobec (1) i (2).
4. Oczywiste wobec (1) i (2).



Normalizator,
centralizator,
komutant.

Definicja

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $H < G$ oraz $M \subset G$.

Normalizatorem zbioru M w podgrupie H nazywamy zbiór

$$N_H(M) = \{a \in H : i_a(M) = M\}.$$

Jeżeli $H = G$ to normalizator zbioru M w podgrupie G nazywamy **normalizatorem zbioru M** i oznaczamy $N(M)$:

$$N(M) = N_G(M) = \{a \in G : i_a(M) = M\}.$$

Uwaga

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $H < G$ oraz $M \subset G$. Wówczas:

1. $N_H(M) < H$ oraz $N(M) < G$;
2. jeżeli $M < G$, to wówczas $M \triangleleft H$ wtedy i tylko wtedy, gdy $N_H(M) = H$ oraz $M \triangleleft G$ wtedy i tylko wtedy, gdy $N(M) = G$.

Dowód:

Dla dowodu części (1) ustalmy $a, b \in N_H(M)$.

Wówczas $i_a(M) = M$ oraz $i_b(M) = M$.

Wobec tego

$$i_{ab^{-1}}(M) = i_a \circ i_{b^{-1}}(M) = i_a(i_b^{-1}(M)) = i_a(M) = M,$$

a zatem $ab^{-1} \in N_H(M)$.

Dla dowodu części (2) założmy najpierw, że $M \triangleleft H$.

Oczywiście $N_H(M) \subset H$, pozostaje więc wykazać drugą inkluzję.

Ustalmy $a \in H$.

Wówczas $aM = Ma$, czyli $aMa^{-1} = M$, a więc $a \in N_H(M)$.

Na odwrót, załóżmy, że $N_H(M) = H$.

Zauważmy najpierw, że $M \subset H$: istotnie, przypuśćmy, że dla pewnego $a \in M$ zachodzi $a \notin H = N_H(M)$.

Wówczas $aMa^{-1} \neq M$, co jest niemożliwe wobec tego, że $a \in M$ oraz M jest podgrupą.

Dalej, skoro $H = N_H(M)$, dla wszystkich $a \in H$ mamy $aMa^{-1} = M$, a zatem $M \triangleleft H$.

Twierdzenie

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $H < G$ oraz $M \subset G$. Wówczas

$$|\{i_a(M) : a \in H\}| = (H : N_H(M)).$$

Dowód:

Zdefiniujmy odwzorowanie $\phi : \{i_a(M) : a \in H\} \rightarrow W_L^H(N_H(M))$ wzorem

$$\phi(i_a(M)) = a \cdot N_H(M), \text{ dla } i_a(M) \in \{i_a(M) : a \in H\}.$$

Jest jasne, że dla ustalonej warstwy $a \cdot N_H(M)$,
 $a \cdot N_H(M) = \phi(i_a(M))$, pozostaje więc wykazać, że
odwzorowanie ϕ jest dobrze określone i różnowartościowe.

Istotnie, dla $a, b \in H$ mamy:

$$\begin{aligned}i_a(M) = i_a(M) &\Leftrightarrow aMa^{-1} = bMb^{-1} \Leftrightarrow b^{-1}aMa^{-1}b = M \\&\Leftrightarrow b^{-1}aM(b^{-1}a)^{-1} = M \Leftrightarrow b^{-1}a \in N_H(M) \\&\Leftrightarrow b^{-1}aN_H(M) = N_H(M) \Leftrightarrow aN_H(M) = bN_H(M).\end{aligned}$$

Wniosek

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą oraz niech $x \in G$. Wówczas

$$|K(x)| = (G : N(\{x\})).$$

Uwaga

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $H < G$ oraz $M < G$. Wówczas

$$M \triangleleft N_H(M) \text{ oraz } M \triangleleft N(M).$$

Grupę $N(M)/M$ nazywamy **grupą Weyla**¹ podgrupy M w grupie G i oznaczamy $W(M)$.

¹Hermann Weyl (1885–1955) – matematyk niemiecki.

Dowód.

Zauważmy, że ponieważ M jest grupą, dla dowolnego $a \in M$ mamy $aMa^{-1} = M$, a zatem $M \subset N_H(M)$.

W szczególności M jest podgrupą $N_H(M)$.

Wprost z definicji $N_H(M)$ otrzymujemy, że jest to podgrupa normalna. □

Definicja

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $H < G$ oraz $M \subset G$.

Centralizatorem zbioru M w podgrupie H nazywamy zbiór

$$Z_H(M) = \{a \in H : \forall m \in M (i_a(m) = m)\}.$$

Jeżeli $H = G$, to normalizator zbioru M w G nazywamy po prostu **centralizatorem zbioru M** i oznaczamy

$$Z(M) = Z_G(M) = \{a \in G \forall m \in M (i_a(m) = m)\}.$$

Jeżeli ponadto $M = G$, to centralizator G nazywamy **centrum grupy G** .

Uwaga

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $H < G$ oraz $M \subset G$. Wówczas:

1. $Z_H(M) < H$ oraz $Z(M) < G$ oraz $Z(G) < G$;
2. $Z_H(M) \triangleleft N_H(M)$ oraz $Z(M) \triangleleft N(M)$ oraz $Z(G) \triangleleft G$.

Dowód.

Dowód części (1) pozostawiamy jako proste ćwiczenie.

Jest oczywiste, że $Z_H(M) \subset N_H(M)$ i skoro $Z_H(M)$ jest grupą, więc w szczególności jest podgrupą $N_H(M)$.

Pozostaje sprawdzić, że jest to podgrupa normalna.

Ustalmy $a \in N_H(M)$ i $x \in Z_H(M)$.

Wówczas $i_x(m) = m$, dla $m \in M$, a zatem

$$i_{axa^{-1}}(m) = i_a(i_x(i_a^{-1}(m))) = i_a(i_a^{-1}(m)) = m,$$

jako że $(i_a^{-1}(m)) \in M$.

Wobec tego $axa^{-1} \in Z_H(M)$ i wobec dowolności wyboru $x \in Z_H(M)$ otrzymujemy $aZ_H(M)a^{-1} \subset Z_H(M)$, więc $Z_H(M) \triangleleft N_H(M)$. □

Uwaga

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Wówczas

$$G/Z(G) \cong \operatorname{Inn} G.$$

Dowód.

Zdefiniujmy odwzorowanie $\phi : G \rightarrow \text{Inn}G$ wzorem

$$\phi(a) = i_a.$$

Bez trudu sprawdzamy, że ϕ jest dobrze określonym surjektywnym homomorfizmem.

Pozostaje sprawdzić, że $\ker \phi = Z(G)$ i skorzystać z twierdzenia o izomorfizmie:

$$\begin{aligned} a \in \ker \phi &\Leftrightarrow i_a = id_G \Leftrightarrow \forall g \in G (aga^{-1} = g) \\ &\Leftrightarrow \forall g \in G (ag = ga) \Leftrightarrow a \in Z(G). \end{aligned}$$



Przykłady:

1. Rozważmy $D(3)$. Wówczas $Z(D(3)) = \{id\}$.
2. Rozważmy $D(4)$. Wówczas $Z(D(4)) = \{id, O_{180^\circ}\}$.
3. Rozważmy $S(n)$, $n \geq 3$. Wówczas $Z(S(n)) = \{id\}$.
4. Rozważmy $GL(n, K)$. Wówczas
 $Z(GL(n, K)) = \{aI : a \in K^*\}$, gdzie I oznacza macierz jednostkową.

Definicja

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą oraz niech $a, b \in G$. Element

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$$

nazywamy **komutatorem** elementów a i b .

Uwaga:

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą oraz niech $a, b \in G$. Wówczas:

1. $[a, a] = 1$;
2. $[a, b] = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ab = ba$;

- 3.
- ▶ $[a, b]^{-1} = [b, a];$
 - ▶ $[a^{-1}, b] = [b, a]^{a^{-1}};$ ²
 - ▶ $[ab, c] = [a, c]^b[b, c], [a, bc] = [a, c][a, b]^c;$
 - ▶ $[[a, b^{-1}], c]^b[[b, c^{-1}], a]^c[[c, a^{-1}], b]^a = 1;$
 - ▶ jeżeli $c \in Z(\{[a, b]\})$, to $[a, bc] = [a, c][a, b]$ oraz $[ac, b] = [a, b][c, b];$

²Symbolem a^x oznaczamy element sprzężony z a poprzez x , tj. $xa x^{-1}$.

4. jeżeli F jest grupą oraz $\phi : G \rightarrow F$ jest homomorfizmem grup, to

$$\phi([a, b]) = [\phi(a), \phi(b)].$$

Definicja

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $M_1, M_2 \subset G$. **Wzajemnym komutantem zbiorów M_1 i M_2 nazywamy grupę**

$$[M_1, M_2] = \langle \{[a, b] : a \in M_1, b \in M_2\} \rangle.$$

Jeśli $M_1 = M_2 = G$, to wzajemny komutant grupy G z samą sobą nazywamy **komutantem grupy G** i oznaczamy $[G, G]$.

Wniosek

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $M_1, M_2 \subset G$. Wówczas:

$$[M_1, M_2] = \{[a_1, b_1]^{k_1} \cdots [a_n, b_n]^{k_n} : n \in \mathbb{N}, k_i \in \mathbb{Z}, a_i \in M_1, b_i \in M_2\}.$$

Uwaga

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Komutant grupy G nie pokrywa się na ogół ze zbiorem wszystkich komutatorów. Istnieją grupy skończone, w których iloczyn dwóch komutatorów może nie być równy żadnemu komutatorowi.

Lemat

Niech G i F będą grupami, $\phi : G \rightarrow F$ homomorfizmem grup, a $M_1, M_2 \subset G$. Wówczas:

$$\phi([M_1, M_2]) = [\phi(M_1), \phi(M_2)] \text{ oraz } \phi([G, G]) = [\phi(G), \phi(G)].$$

Dowód:

($\subset$) : Ustalmy $y \in \phi([M_1, M_2])$. Wówczas $y = \phi(x)$, gdzie

$$x = [a_1, b_1]^{k_1} \cdot \dots \cdot [a_n, b_n]^{k_n}$$

dla pewnych $n \in \mathbb{N}$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $a_i \in M_1$, $b_i \in M_2$. Wobec tego:

$$\begin{aligned} y &= \phi([a_1, b_1]^{k_1} \cdot \dots \cdot [a_n, b_n]^{k_n}) = \phi([a_1, b_1])^{k_1} \cdot \dots \cdot \phi([a_n, b_n])^{k_n} \\ &= [\phi(a_1), \phi(b_1)]^{k_1} \cdot \dots \cdot [\phi(a_n), \phi(b_n)]^{k_n} \in [\phi(M_1), \phi(M_2)]. \end{aligned}$$

($\supset$) : Ustalmy $c \in \phi(M_1)$, $d \in \phi(M_2)$.

Wówczas $c = \phi(a)$, $d = \phi(b)$ dla pewnych $a \in M_1$, $b \in M_2$.

Mamy:

$$[c, d] = [\phi(a), \phi(b)] = \phi([a, b]) \in \phi([M_1, M_2])$$

i skoro $\phi([M_1, M_2]) < F$ oraz $[\phi(M_1), \phi(M_2)]$ jest najmniejszą podgrupą zawierającą komutatory $[c, d]$, $c \in \phi(M_1)$, $d \in \phi(M_2)$, to $[\phi(M_1), \phi(M_2)] \subset \phi([M_1, M_2])$.

Twierdzenie

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $M_1 \triangleleft G$, $M_2 \triangleleft G$. Wówczas

$$[M_1, M_2] \triangleleft G \text{ oraz } [G, G] \triangleleft G.$$

Dowód.

Ustalmy $a \in G$. Mamy:

$$\begin{aligned} a[M_1, M_2]a^{-1} &= i_a([M_1, M_2]) = [i_a(M_1), i_a(M_2)] = \\ &= [aM_1a^{-1}, aM_2a^{-1}] = [M_1, M_2]. \end{aligned}$$



Twierdzenie

Niech G i F będą grupami, a $\phi : G \rightarrow F$ surjektywnym homomorfizmem grup. Wówczas

F jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy $[G, G] \leq \ker \phi$.

Dowód:

Założmy, że F jest abelowa i ustalmy $a, b \in G$.

Wtedy

$$\phi([a, b]) = [\phi(a), \phi(b)] = 1,$$

a zatem $[a, b] \in \ker \phi$ i skoro $\ker \phi < G$ oraz $[G, G]$ jest najmniejszą podgrupą zawierającą komutatory $[a, b]$, $a, b \in G$, to $[G, G] < \ker \phi$.

Na odwrót, założmy, że $[G, G] < \ker \phi$ i ustalmy $c, d \in F$.
Wobec surjektywności ϕ , $c = \phi(a)$ i $d = \phi(b)$, dla pewnych $a, b \in G$. Ponadto

$$[c, d] = [\phi(a), \phi(b)] = \phi([a, b]) = 1,$$

a więc $cd = dc$.

Wniosek

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $H \triangleleft G$. Wówczas

G/H jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy $[G, G] < H$.

Innymi słowy, komutant jest najmniejszą podgrupą normalną względem której grupa ilorazowa jest abelowa.

Wniosek

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Wówczas

$G/[G, G]$ jest abelowa.

Wniosek

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Wówczas

G jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy $[G, G] = \{1\}$.

Definicja

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Homomorfizm kanoniczny $\kappa : G \rightarrow G/[G, G]$ nazywamy **abelianizacją** grupy G .

Lemat

Niech G i F będą grupami, $\phi : G \rightarrow F$ homomorfizmem grup.
Niech $M_1, M_2 \subset G$, $H < G$, $L_1, L_2 \subset F$. Wówczas

1. $[\phi^{-1}(L_1), \phi^{-1}(L_2)] \subset \phi^{-1}([L_1, L_2])$ oraz
 $[\phi^{-1}(F), \phi^{-1}(F)] \subset \phi^{-1}([F, F]);$
2. $[M_1 \cap H, M_2 \cap H] \subset [M_1, M_2] \cap H.$

Dowód:

(1): Ustalmy $a \in \phi^{-1}(L_1)$, $b \in \phi^{-1}(L_2)$.

Wówczas $\phi(a) \in L_1$, $\phi(b) \in L_2$ i tym samym

$$\phi([a, b]) = [\phi(a), \phi(b)] \in [L_1, L_2].$$

Zatem $[a, b] \in \phi^{-1}([L_1, L_2])$ i skoro $\phi^{-1}([L_1, L_2]) < G$ oraz $[\phi^{-1}(L_1), \phi^{-1}(L_2)]$ jest najmniejszą podgrupą zawierającą komutatory $[a, b]$, $a \in \phi^{-1}(L_1)$, $b \in \phi^{-1}(L_2)$, to $[\phi^{-1}(L_1), \phi^{-1}(L_2)] \subset \phi^{-1}([L_1, L_2])$.

(2): Ustalmy $a \in M_1 \cap H$, $b \in M_2 \cap H$.

Wówczas

$$[a, b] \in [M_1, M_2]$$

oraz

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1} \in H.$$

Zatem $[a, b] \in [M_1, M_2] \cap H$ i skoro $[M_1, M_2] \cap H < G$ oraz $[M_1 \cap H, M_2 \cap H]$ jest najmniejszą podgrupą zawierającą komutatory $[a, b]$, $a \in M_1 \cap H$, $b \in M_2 \cap H$, to $[M_1 \cap H, M_2 \cap H] \subset [M_1, M_2] \cap H$.

Grupy rozwiązalne.

Definicja

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Wówczas ciąg podgrup grupy G zdefiniowany indukcyjnie wzorami

- ▶ $G^{(0)} = G$,
- ▶ $G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$, dla $i \in \mathbb{N}$

nazywamy **górnym ciągiem centralnym** grupy G , a jego elementy **hipercentralami**;

Uwaga

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $(G^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ jej górnym ciągiem centralnym. Wówczas

1. $G^{(i+1)} \subset G^{(i)}$, $G^{(i)} \triangleleft G$, dla $i \in \mathbb{N}$;
2. $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ są abelowe dla $i \in \mathbb{N}$.

Dowód:

(1) Pokażemy, że jeśli $M_1 \triangleleft G$ oraz $M_2 \triangleleft G$, to $[M_1, M_2] \triangleleft G$ i $[M_1, M_2] \subset M_1 \cap M_2$.

Ustalmy w tym celu $M_1 \triangleleft G$ i $M_2 \triangleleft G$.

Pierwsza teza wynika z udowodnionego wcześniej twierdzenia.

Dla dowodu drugiej tezy ustalmy

$[a_1, b_1]^{k_1} \dots [a_n, b_n]^{k_n} \in [M_1, M_2]$, gdzie $a_i \in M_1$, $b_i \in M_2$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$.

Wówczas:

$$\begin{aligned} & [a_1, b_1]^{k_1} \dots [a_n, b_n]^{k_n} \\ &= \underbrace{(a_1 b_1 a_1^{-1})}_{\in M_2} \underbrace{(b_1^{-1})}_{\in M_2} \dots \underbrace{(a_n b_n a_n^{-1})}_{\in M_2} \underbrace{(b_n^{-1})}_{\in M_2} \in M_2. \end{aligned}$$

Podobnie $[a_1, b_1]^{k_1} \dots [a_n, b_n]^{k_n} \in M_1$.

Pokażemy, że $G^{(i)} \triangleleft G$, dla $i \in \mathbb{N}$.

Dla $i = 0$ jest to oczywiste, założmy więc, że $G^{(i)} \triangleleft G$.

Wobec tego

$$G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}] \triangleleft G,$$

co dowodzi tezy na mocy indukcji względem $i \in \mathbb{N}$.

Pokażemy, że $G^{(i+1)} \subset G^{(i)}$, dla $i \in \mathbb{N}$.

Ustalmy $i \in \mathbb{N}$.

Ponieważ $G^{(i)} \triangleleft G$, mamy

$$G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}] \subset G^{(i)} \cap G^{(i)} = G^{(i)}.$$

(2) Pokażemy, że $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ są abelowe, dla $i \in \mathbb{N}$.

Ustalmy $i \in \mathbb{N}$.

Ponieważ $G^{(i+1)} \triangleleft G$, więc $G^{(i+1)} \triangleleft G^{(i)}$.

Ponadto $[G^{(i)}, G^{(i)}] < G^{(i+1)}$, więc wobec udowodnionego wcześniej wniosku $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ jest abelowa.

Definicja

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Wówczas jeżeli $(G^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ jest jej górnym ciągiem centralnym oraz $G^{(i)} = \{1\}$ dla pewnego $i \in \mathbb{N}$, to G nazywamy **grupą rozwiązalną**, a najmniejszą liczbę $i \in \mathbb{N}$, dla której $G^{(i)} = \{1\}$ **stopniem rozwiązalności**.

Przykłady:

1. Rozważmy grupę $D(3)$. Ciąg

$$D(3) > \{I, O_{120}, O_{240}\} > \{I\}$$

jest górnym ciągiem centralnym i tym samym $D(3)$ jest rozwiązalna.

Definicja

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Wówczas skończony ciąg podgrup grupy G , $(G = G_0, G_1, \dots, G_n = \{1\})$, taki, że

- ▶ $G_{i+1} \triangleleft G_i$, dla $i \in \{0, \dots, n-1\}$,

nazywamy **ciągami podnormalnym (lub subnormalnym)** grupy G . Liczbę n nazywamy **długością ciągu**, a grupy

$$G_i/G_{i+1}, \text{ dla } i \in \{0, \dots, n-1\}$$

faktorami ciągu.

Twierdzenie

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą skończoną. Następujące warunki są równoważne:

1. G jest rozwiązalna,
2. istnieje ciąg $(G = G_0, G_1, \dots, G_n = \{1\})$ podnormalny o faktorach abelowych,
3. istnieje ciąg $(G = G_0, G_1, \dots, G_m = \{1\})$ podnormalny o faktorach cyklicznych.

Dowód:

(1) $\Rightarrow$ (2): oczywiste wobec wcześniejszych uwag i przykładów.

(2) $\Rightarrow$ (3): Pokażemy, że skończona grupa abelowa ma ciąg podnormalny o faktorach cyklicznych.

Jest to oczywiste, gdy $|G| = 1$, zaś w przypadku $|G| = m$ założmy, że dla grup rzędu $|G| < m$ twierdzenie jest prawdziwe.

Pokażemy, że w G istnieje ciąg podnormalny o faktorach cyklicznych.

Ustalmy $a \in G \setminus \{1\}$.

Niech $H = \langle a \rangle$.

Wówczas H jest cykliczna oraz $|G/H| < m$ i oczywiście G/H jest abelowa.

Wobec założenia indukcyjnego

$$(G/H = G'_0, G'_1, \dots, G'_n = \{1\})$$

jest ciągiem podnormalnym o faktorach cyklicznych.

Niech

$$G_i = \kappa^{-1}(G'_i), \text{ dla } i \in \{1, \dots, k\} \text{ oraz } G_{k+1} = \{1\},$$

gdzie $\kappa : G \rightarrow G/H$ jest epimorfizmem kanonicznym.

Wówczas

$$G_{i-1}/G_i = G'_{i-1}/G'_i, \text{ dla } i \in \{1, \dots, k\} \text{ oraz } G_k/G_{k+1} \cong H.$$

Zatem $(G = G_0, G_1, \dots, G_{k+1} = \{1\})$ jest ciągiem podnormalnym o faktorach cyklicznych i na mocy zasady indukcji matematycznej teza została udowodniona.

Niech $(G = G_0, G_1, \dots, G_k = \{1\})$ będzie ustalonym ciągiem podnormalnym o faktorach abelowych.

Grupy G_{i-1}/G_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, są skończonymi grupami abelowymi.

Niech

$$G_{i-1}/G_i = G'_{i,0}, G'_{i,1}, \dots, G'_{i,k_i} = \{1\}, \text{ dla } i \in \{1, \dots, k\},$$

będą ciągami podnormalnymi o faktorach cyklicznych.

Niech

$$G_{i,j} = \kappa_i^{-1}(G'_{i,j}), \text{ dla } j \in \{0, \dots, k_i\}, i \in \{1, \dots, k\},$$

gdzie $\kappa_i : G_{i-1} \rightarrow G_{i-1}/G_i$ są epimorfizmami kanonicznymi.

Zatem:

- ▶ $G_{i,0} = G_{i-1}$, $i \in \{1, \dots, k\}$,
- ▶ $G_{i,k_i} = G_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$,
- ▶ $G_{i,j} \triangleleft G_{i,j-1}$, dla $j \in \{0, \dots, k_i\}$, $i \in \{1, \dots, k\}$,
- ▶ $G_{i,j-1}/G_{i,j} \cong G'_{i,j-1}/G'_{i,j}$, dla $j \in \{0, \dots, k_i\}$, $i \in \{1, \dots, k\}$.

Zatem $(G = G_{1,0}, G_{1,1}, \dots, G_{1,k_1} = G_2 = G_{2,0}, G_{2,1}, \dots, G_{2,k_2}, \dots, G_{k,0}, \dots, G_k = \{1\})$ jest ciągiem podnormalnym o faktorach cyklicznych.

(3) $\Rightarrow$ (1): Niech $(G = G_0, G_1, \dots, G_k = \{1\})$ będzie ciągiem podnormalnym o faktorach cyklicznych.

Pokażemy, że $G^{(i)} \subset G_i$, dla $i \in \{0, \dots, k\}$.

Jest to oczywiste dla $i = 0$, założmy więc, że dla ustalonego $i > 0$ zachodzi $G^{(i)} \subset G_i$.

Pokażemy, że $G^{(i+1)} \subset G_{i+1}$.

Istotnie:

$$G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}] \subset [G_i, G_i].$$

Ponieważ $G_{i+1} \triangleleft G_i$ oraz G_i/G_{i+1} jest cykliczna, a więc abelowa, więc wobec odpowiedniego wniosku:

$$[G_i, G_i] \subset G_{i+1}.$$

Definicja

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Grupę G nazywamy **p -grupą**, jeżeli $|G| = p^k$ dla pewnej liczby pierwszej p oraz $k \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie

Niech $(G, \cdot)$ będzie p -grupą. Wówczas G jest rozwiązalna.

Twierdzenie

Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $|G| = pq$, gdzie p i q są liczbami pierwszymi. Wówczas G jest grupą rozwiązalną.

Przykłady:

2. Rozważmy grupę $D(4)$. Mamy

$$|D(4)| = 8 = 2^3,$$

a więc $D(4)$ jest rozwiązalna jako p -grupa.

3. Rozważmy grupę $S(3)$. Mamy

$$|S(3)| = 6 = 2 \cdot 3,$$

a więc $S(3)$ jest rozwiązalna jako grupa rzędu pq .

Twierdzenie (Burnside'a)

³ Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $|G| = p^a q^b$, gdzie p i q są liczbami pierwszymi oraz $a, b \in \mathbb{N}$. Wówczas G jest grupą rozwiązalną.

³Twierdzenie pochodzi z 1911 roku, zwiemy je też “ $p^a q^b$ -theorem”.

Twierdzenie (Feit'a-Thompsona)

⁴ Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $|G| = 2k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.
Wówczas G jest grupą rozwiązalną.

⁴Twierdzenie pochodzi z 1963 roku, jego oryginalny dowód zajmuje 254 strony: W. Feit, J. Thompson, *Solvability of groups of odd order*, Pacific J. of Math. 13 (1963), 775-1029.