

Zestaw zadań 4: Przestrzenie wektorowe i podprzestrzenie. Liniowa niezależność. Sumy i sumy proste podprzestrzeni.

- (1) Wykazać, że $V = \mathbb{C}$ ze zwykłym dodawaniem jako dodawaniem wektorów i operacją mnożenia przez skalar

$$\begin{aligned} * & : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \\ (z, v) & \mapsto z * v := \bar{z} \cdot v \end{aligned}$$

jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$.

- (2) Niech V będzie zbiorem liczb rzeczywistych dodatnich, a dodawanie wektorów niech będzie mnożeniem liczb. Operację mnożenia przez liczby rzeczywiste określimy następująco:

$$\begin{aligned} \cdot & : \mathbb{R} \times V \rightarrow V, \\ (a, v) & \mapsto v^a \end{aligned}$$

Wykazać, że wyżej opisana struktura algebraiczna jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

- (3) Niech K będzie dowolnym ciałem oraz niech $V = K^\infty$ (zbiór wszystkich nieskończonych ciągów elementów ciała K). Określimy działania dodawania wektorów oraz mnożenia wektorów przez skalary z ciała K następująco:

$$\begin{aligned} [a_1, a_2, \dots] + [b_1, b_2, \dots] & : = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots], \\ a \cdot [a_1, a_2, \dots] & : = [aa_1, aa_2, \dots]. \end{aligned}$$

Pokazać, że wyżej zdefiniowana struktura algebraiczna jest przestrzenią wektorową nad ciałem K .

- (4) Niech A będzie niepustym zbiorem oraz niech K będzie dowolnym ciałem. Oznaczmy symbolem K^A zbiór wszystkich funkcji $A \rightarrow K$. Sumą funkcji $f : A \rightarrow K$ oraz funkcji $g : A \rightarrow K$ nazywamy funkcję $f + g : A \rightarrow K$ taką, że $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ dla każdego $a \in A$. Iloczynem funkcji $f : A \rightarrow K$ przez skalar x z ciała K nazywamy funkcję $xf : A \rightarrow K$ taką, że $(xf)(a) = xf(a)$ dla każdego $a \in A$. Pokazać, że tak zdefiniowana struktura algebraiczna jest przestrzenią liniową nad ciałem K .
- (5) Oznaczmy symbolem $K[X]$ zbiór wszystkich wielomianów zmiennej X o współczynnikach z ciała K . Sprawdzić, że z działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez elementy ciała K , zbiór $K[X]$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem K .
- (6) Oznaczmy symbolem $K(X)$ zbiór wszystkich funkcji wymiernych zmiennej X o współczynnikach z ciała K . Sprawdzić, że z działaniami dodawania funkcji wymiernych i mnożenia funkcji wymiernej przez element ciała K zbiór $K(X)$ jest przestrzenią wektorów nad ciałem K .
- (7) Niech A będzie dowolnym zbiorem, a $P(A)$ niech będzie zbiorem wszystkich jego podzbiorów. Działanie dodawania w zbiorze $P(A)$ definiujemy następująco: $B \div C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$. Mnożenie elementów $P(A)$ przez elementy ciała $\mathbb{Z}_2$ definiujemy w oczywisty sposób: $0 \cdot B = \emptyset$, $1 \cdot B = B$. Sprawdzenie łączności działania $\div$ jest dość kłopotliwe.
- (a) Zakładając, że działanie $\div$ jest łączne, sprawdzić, że spełnione są również pozostałe aksjomaty przestrzeni liniowej.
- (b) Wykazać łączność działania $\div$.
- (8) Niech $V = \mathbb{C}^4$, $U = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in V : z_1 = z_2 = 0\}$. Wektory dodawać będziemy w zwykły sposób natomiast mnożenie przez skalary definiujemy na cztery różne sposoby:
- a) $z\alpha = \theta$ dla $z \in \mathbb{C}$ oraz $\alpha \in V$.

- b) $z\alpha = \alpha$ dla $z \in \mathbb{C}$ oraz $\alpha \in V$.
- c) $z\alpha = (\operatorname{Re} z)\alpha$ dla $z \in \mathbb{C}$ oraz $\alpha \in V$.
- d) $z\alpha = \begin{cases} z\alpha & \text{gdy } z \in \mathbb{C} \text{ i } \alpha \in U \\ \bar{z}\alpha & \text{gdy } z \in \mathbb{C} \text{ i } \alpha \notin U \end{cases}$.

Sprawdzić, że w każdym z czterech powyższych przykładów dokładnie jeden z aksjomatów przestrzeni liniowej nie jest spełniony.

- (9) Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni K^4 są podprzestrzeniami wektorowymi:
 - a) $U = \{[t, t+1, 0, 1] : t \in K\}$,
 - b) $U = \{[t, u, t+u, t-u] : t, u \in K\}$,
 - c) $U = \{[tu, u, t, 0] : t, u \in K\}$,
 - d) $U = \{[x, y, z, t] : x+y-z=0\}$,
 - e) $U = \{[x, y, z, t] : xy=0\}$,
 - f) $U = \{t[1, 0, 1, 0] + u[0, -1, 0, 1] : t, u \in K\}$.
- (10) Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^4$ są podprzestrzeniami liniowymi:
 - a) $U = \{[t, u, t+u, t-u] : t \leq u\}$,
 - b) $U = \{[t, u, t, 0] : tu \geq 0\}$,
 - c) $U = \{[x, y, z, t] : x, y, z, t \in \mathbb{Q}\}$.
- (11) Niech $\mathbb{R}^\infty$ będzie przestrzenią ciągów elementów ciała $\mathbb{R}$. Zbadać, które spośród następujących zbiorów są podprzestrzeniami wektorowymi przestrzeni $\mathbb{R}^\infty$:
 - a) $U_1 = \{[a_1, a_2, \dots] : a_{i+1} = a_i + a_{i-1} \text{ dla każdego } i = 2, 3, \dots\}$;
 - b) $U_2 = \{[a_1, a_2, \dots] : a_i = \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_{i+1}) \text{ dla każdego } i = 2, 3, \dots\}$;
 - c) zbiór wszystkich ciągów $[a_1, a_2, \dots]$, których prawie wszystkie wyrazy (wszystkie wyrazy z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby) są równe zero;
 - d) zbiór wszystkich ciągów ograniczonych.
- (12) Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem niepustym oraz niech $V = \mathbb{R}^A$ będzie przestrzenią funkcji $A \rightarrow \mathbb{R}$ (zob. zadanie ?? , str. ??). Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^A$ są podprzestrzeniami liniowymi:
 - a) zbiór wszystkich funkcji parzystych, gdy $A = \mathbb{R}$.
 - b) zbiór wszystkich funkcji nieparzystych, gdy $A = \mathbb{R}$.
 - c) zbiór wszystkich funkcji rosnących.
 - d) zbiór wszystkich funkcji monotonicznych.
 - e) $U = \{f \in V : f(0) = f(1)\}$, gdy $A = [0, 1]$.
 - f) $U = \{f \in V : f(x) = 0 \text{ dla każdego } x \in B\}$, gdy $B \subset A$ i $B \neq A$.
- (13) Sprawdzić, które z określonych podzbiorów przestrzeni wielomianów $K[X]$ nad ciałem K są podprzestrzeniami wektorowymi:
 - a) $U = \{F \in K[X] : F(-1) = 0\}$,
 - b) $U = \{F \in K[X] : F(0) \cdot F(1) = 0\}$,
 - c) $K[X]_{10} = \{F \in K[X] : \operatorname{st} F \leq 10\}$,
 - d) $U = \{F \in K[X] : \operatorname{st} F = 10\}$.
- (14) Pokazać, że jeśli $U_1 = \operatorname{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, $U_2 = \operatorname{lin}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$, to

$$U_1 + U_2 = \operatorname{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l).$$
- (15) Wyznaczyć wszystkie podprzestrzenie przestrzeni
 - a) $\mathbb{Z}_2^2$; b) $\mathbb{Z}_3^2$; c) $\mathbb{Z}_2^3$.
- (16) Pokazać, że jeśli U oraz W są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V , to $U \cup W$ jest podprzestrzenią przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy $U \subset W$ lub $W \subset U$.

- (17) Sprawdzić, czy wektory α oraz β są kombinacjami liniowymi układu $\mathcal{A}$ wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^4$, jeżeli

$$\text{a) } \mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \alpha = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b) } \mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \alpha = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Czy zapis wektora α w postaci kombinacji liniowej układu $\mathcal{A}$ jest jednoznaczny?

- (18) Dla jakiej liczby zespolonej $c \in \mathbb{C}$ wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix}$ jest kombinacją liniową wektorów $\begin{bmatrix} c \\ -1+i \\ 1+i \end{bmatrix}$

oraz $\begin{bmatrix} i \\ -1 \\ -c \end{bmatrix}$ przestrzeni $\mathbb{C}^3$?

- (19) Sprawdzić, czy układ $\left(\begin{bmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ i \end{bmatrix} \right)$ wektorów przestrzeni $\mathbb{C}^3$ jest liniowo niezależny¹.

Przedstawić wektor $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1+2i \end{bmatrix}$ jako ich kombinację liniową.

- (20) Sprawdzić, że każda kombinacja liniowa $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ wektorów $\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ -i \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ -i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ z przestrzeni $\mathbb{C}^4$ spełnia warunek $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, a nie każda spełnia warunek $|x_4| \leq 2$.

- (21) Znaleźć taki wektor $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ przestrzeni $\mathbb{Z}_2^3$, aby wektory $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ były liniowo niezależne. Ile rozwiązań ma to zadanie?

- (22) Zbiór $\mathbb{C}$ liczb zespolonych z działaniami dodawania liczb zespolonych i mnożenia liczb zespolonych przez liczby rzeczywiste jest przestrzenią wektorów nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Oznaczamy ją symbolem $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Sprawdzić, że każde trzy wektory z $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ są liniowo zależne.

- (23) Sprawdzić, czy układ wektorów $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ przestrzeni K^4 jest liniowo zależny, jeżeli

$$\text{a) } K = \mathbb{Z}_7, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

¹Pojęcie liniowej niezależności wektorów pochodzi od Grassmanna.

$$\text{b) } K = \mathbb{R}, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$\text{c) } K = \mathbb{C}, \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 3 \\ -i \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 4+i \\ 0 \\ 5+3i \\ 5 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2i \\ i \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{d) } K = \mathbb{Z}_5, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Jeżeli to możliwe, przedstawić jeden z wektorów tego układu jako kombinację liniową pozostałych.

(24) Pokazać, że jeśli $U_1 = \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, $U_2 = \text{lin}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$, to

$$U_1 + U_2 = \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l).$$

(25) Wykazać, że:

a) Suma $U_1 + \dots + U_k$ podprzestrzeni przestrzeni liniowej V jest podprzestrzenią przestrzeni V .

b) $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k \Leftrightarrow$ każdy wektor $v \in V$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $v = u_1 + \dots + u_k$, gdzie $u_i \in U_i$ dla $i = 1, 2, \dots, k$.

(26) Pokazać, że $\mathbb{R}^4 = U_1 \oplus U_2$, jeżeli

a) U_1 jest zbiorem rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, a $U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

b) U_1 jest zbiorem rozwiązań układu równań $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$, natomiast $U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

(27) Pokazać, że $\mathbb{R}^4 = U_1 + U_2$, lecz $\mathbb{R}^4 \neq U_1 \oplus U_2$, jeżeli U_1 jest zbiorem rozwiązań równania $3x_1 -$

$2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0$, zaś $U_2 = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$. Do równania definiującego U_1 dołożyć jeszcze

jedno równanie tak, aby nowa podprzestrzeń rozwiązań U'_1 spełniała warunek $\mathbb{R}^4 = U'_1 \oplus U_2$.

(28) Uzasadnić, że

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 &= \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \oplus \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \oplus \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \oplus \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).\end{aligned}$$

W przypadku każdej sumy prostej przedstawić wektor $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ w postaci sumy wektora z pierwszego składnika sumy prostej i wektora z drugiego składnika sumy prostej.

(29) Niech $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (zob. zadanie 4 z poprzedniego zestawu ??, str. ??). Zbiór funkcji nieparzystych oznaczmy literą **N**, natomiast zbiór funkcji parzystych - literą **P**. Pokazać, że **N** oraz **P** są podprzestrzeniami przestrzeni V oraz że $V = \mathbf{N} \oplus \mathbf{P}$. Przedstawić funkcję f daną wzorem

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

w postaci sumy funkcji parzystej i funkcji nieparzystej.

(30) Niech V będzie przestrzenią liniową oraz niech $B \subset A$. Oznaczmy $U_B = \{f \in V^A : f(a) = \theta \text{ dla } a \in B\}$. Pokazać, że U_B jest podprzestrzenią przestrzeni V^A . Dla jakich podzbiorów B oraz C zbioru A zachodzi równość $V^A = U_B + U_C$, a dla jakich równość $V^A = U_B \oplus U_C$?

(31) Sprawdzić, czy $K_n^n = \mathbf{S}_n \oplus \mathbf{A}_n$ (por. zadanie ?? str. ??).

(32) W zbiorze $\mathbb{Z}_6$ wyróżnimy dwa podzbiory: $U = \{0, 2, 4\}$ oraz $W = \{0, 3\}$. Pokazać, że U jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{Z}_3$ i W jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_6 = U + W$, $U \cap W = \{0\}$. Czy $\mathbb{Z}_6$ jest sumą prostą przestrzeni liniowych U i W ?

(33) Sprawdzić, że podzbiór $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{Z}_3^3$ jest podprzestrzenią liniową, a podzbiór

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{Q}^3 \text{ nie jest podprzestrzenią.}$$

(34) (*Modularność kraty podprzestrzeni*) Niech U_1, U_2, U_3 będą podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V . Udowodnić, że

- $U_1 + (U_2 \cap U_3) \subset (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$,
- $(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \subset U_1 \cap (U_2 + U_3)$,
- $(U_1 \cap U_2) + (U_2 \cap U_3) + (U_3 \cap U_1) \subset (U_1 + U_2) \cap (U_2 + U_3) \cap (U_3 + U_1)$,
- $(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) = U_1 \cap (U_2 + (U_1 \cap U_3))$,
- jeśli $U_1 \subset U_3$, to $U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap U_3$.

(35) (*Niedystrybutywność kraty podprzestrzeni*) Podaj przykład podprzestrzeni U_1, U_2, U_3 przestrzeni $\mathbb{R}^2$ dla których

- $U_1 + (U_2 \cap U_3) \neq (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$,
- $(U_1 + U_2) \cap U_3 \neq (U_1 \cap U_3) + (U_1 \cap U_3)$.

- (36) (G. Birkhoff²) Sprawdzić, że z podprzestrzeni $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, $\text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ za

pomocą operacji $+$ i $\cap$ można utworzyć nieskończenie wiele różnych podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^3$. (*Wskazówka: wygodnie jest rysować na płaszczyźnie $z = 1$ przekroje badanych podprzestrzeni z tą płaszczyzną; nie wszystkie podprzestrzenie mają z nią niepusty przekrój!*)

- (37) Wykazać, że następujące pary przestrzeni wektorowych są izomorficzne:

a) $U_1 \oplus U_2$ i $U_1 \times U_2$,

b) $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$ i $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_k$,

c) $(U_1 + U_2) / (U_1 \cap U_2)$ i $U_1 / (U_1 \cap U_2) \times U_2 / (U_1 \cap U_2)$,

gdzie $U_1, U_2, \dots, U_k$ są podprzestrzeniami przestrzeni linowej V .

²Garret Birkhoff (ur. 1911 r.) - współczesny matematyk amerykański, nie mylić z George D. Birkhoffem (1884 - 1944), amerykańskim specjalistą od równań różniczkowych.