Zestaw zadań 3: Macierze i wyznaczniki. [1]

(1) Obliczyć iloczyny macierzy:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}^2$,

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3$, (e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$,

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T$, (g) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

(2) Dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ obliczyć:

(a) $A^2 + 2AB + B^2$ i $(A+B)^2$;
(b) $A^2 - 2AB + B^2$ i $(A-B)^2$;
(c) $A^2 - B^2$, $(A-B)(A+B)$ i $(A+B)(A-B)$.

(3) Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej m zachodzą równości:

(a) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} a^m & 0 \\ 0 & b^m \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} 1 & ma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

(c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \cos m\alpha & -\sin m\alpha \\ \sin m\alpha & \cos m\alpha \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} a^m & ma^{m-1} \\ 0 & a^m \end{bmatrix}$,

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} 1 & m & \frac{m(m-1)}{2} \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(4) Jeśli $A \in K_n^n$, $B \in K_m^m$, $C \in K_n^m$, $D \in K_m^n$, to macierz $\left[\begin{array}{c|c} A & D \\ \hline C & B \end{array}\right]$ nazywamy macierzą klatkową o klatkach A, D, C, B. Sprawdzić, że

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & D_1 \\ \hline C_1 & B_1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} A_2 & D_2 \\ \hline C_2 & B_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1A_2 + D_1C_2 & A_1D_2 + D_1B_2 \\ \hline C_1A_2 + B_1C_2 & C_1D_2 + B_1B_2 \end{array}\right].$$

(5) Dla $A \in K_m^n$, $B \in K_n^m$ udowodnić równość $tr(AB) = tr(BA)$.

(6) Dla $A \in K_m^n$, $B \in K_s^m$ udowodnić równość $(AB)^T = B^T A^T$. Podać przykład pary macierzy C, D dla których równość $(CD)^T = C^T D^T$ nie zachodzi.

(7) Znaleźć wszystkie takie macierze $A \in K_2^2$, że

(a) $A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A$, (b) $A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, (d) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, (e) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(8) *Centralizatorem* macierzy $A \in K_n^n$ nazywamy zbiór $Z(A) = \{X \in K_n^n : AX = XA\}$.

(a) Sprawdzić, że $Z(A)$ jest podalgebrą algebry K_n^n (tzn. jest podprzestrzenią przestrzeni K_n^n, zawiera macierz jednostkową I oraz jest zamknięty ze względu na mnożenie).

[1] Pojęcie macierzy wprowadzili angielscy matematycy: William Rowan Hamilton (1805 - 1865), Arthur Cayley (1821 - 1895) i John J. Sylvester (1814 - 1897) w latach 40-tych XIX w.

(b) Wyznaczyć $Z(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix})$.

(c) Wyznaczyć $Z(A)$ w zależności od danej dowolnej macierzy $A \in K_2^2$.

(d) Dla jakich $A \in K_2^2$ zachodzi równość $Z(A) = lin(I, A)$?

(e) Udowodnić, że każda macierz $A \in K_2^2$ spełnia warunek $A^2 \in lin(I, A)$.

(9) Niech E_{ir} oznacza macierz kwadratową stopnia n, której element o wskanikach i, r równy jest 1, a pozostałe elementy są równe 0. Obliczyć:
(a) $E_{ir} \cdot E_{lk}$, (b) $A \cdot E_{ir}$, (c) $E_{ir} \cdot A$, (d) $A \cdot (I_n + aE_{ir})$, $i \neq r$, (e) $(I_n + bE_{ir}) \cdot A$, $i \neq r$, (f) $(I_n + aE_{ir})(I_n + bE_{ir})$, $i \neq r$,
gdzie $A \in K_n^n$, $a, b \in K$. Zinterpretować (d) oraz (e) w języku operacji elementarnych wykonanych na A.

(10) Wykazać, że dla dowolnego zbioru $\mathcal{A} \subset K_n^n$ i dla dowolnej macierzy $A \in K_n^n$, A jest przemienna z każdą macierzą ze zbioru $\mathcal{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest przemienna z każdą macierzą ze zbioru $lin(\mathcal{A})$.

(11) Macierze postaci aI_n , $a \in K$, nazywamy macierzami skalarnymi. Wykazać, że macierz $A \in K_n^n$ jest przemienna z wszystkimi macierzami ze zbioru K_n^n wtedy i tylko wtedy, gdy A jest macierzą skalarną.

(12) Wykaż, że zbiór macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

z działaniem mnożenia macierzy, jest grupą abelową.

(13) Wyznacz wszystkie macierze stopnia 2 takie, że $A^2 = I$.

(14) Wyznacz wszystkie macierze stopnia 2 takie, że $A^2 = 0$.

(15) Oblicz $f(A)$ jeśli

(a) $f(X) = X^2 - 2X - I$ i A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $f(X) = X^2 - 5X - 3I$ i A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(16) Obliczyć wyznaczniki następujących macierzy:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$,

(e) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$, (f) $\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{bmatrix}$ gdzie α, β, γ są miarami kątów trójkąta,

(g) $\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{bmatrix}$, gdzie $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, (h) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 \end{bmatrix}$, gdzie $\varepsilon = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$,

(i) $\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -r\sin\alpha\cos\beta & -r\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta & r\cos\alpha\cos\beta & -r\sin\alpha\sin\beta \\ \sin\beta & 0 & r\cos\beta \end{bmatrix}$.

(17) Obliczyć następujce wyznaczniki (nad $\mathbb{R}$):

$$
\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}, \quad
\text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}, \quad
\text{(c)} \begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 4 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix},
$$

$$
\text{(d)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad
\text{(e)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad
\text{(f)} \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix},
$$

$$
\text{(g)} \begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}, \quad
\text{(h)} \begin{vmatrix} 30 & 20 & 15 & 12 \\ 20 & 15 & 12 & 15 \\ 15 & 12 & 15 & 20 \\ 12 & 15 & 20 & 30 \end{vmatrix}, \quad
\text{(i)} \begin{vmatrix} 5 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -7 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},
$$

$$
\text{(j)} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 20 & 50 & 140 & 140 \\ 0 & -16 & -70 & -195 & -560 & -560 \\ 0 & 26 & 125 & 366 & 1064 & 1064 \\ 0 & -31 & -154 & -460 & -1344 & -1344 \\ 0 & 4 & 20 & 60 & 176 & 175 \\ 0 & 4 & 20 & 60 & 175 & 176 \end{vmatrix}, \quad
\text{(k)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}.
$$

(18) Obliczyć:

$$
\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_7, \quad
\text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 8 & 10 \end{vmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_{11}, \quad
\text{(c)} \begin{vmatrix} 7 & 6 & 11 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 6 \\ 1 & 10 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & 9 & 2 & 2 \end{vmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_{13}.
$$

(19) Obliczyć wyznaczniki następujących macierzy stopnia n :

$$
\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad
\text{(b)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad
\text{(c)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{bmatrix},
$$

(d) $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}$, (e) $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & a & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & a \end{bmatrix}$,

(f) $\begin{bmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{bmatrix}$, (g) $\begin{bmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$.

(20) Niech $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, będzie macierzą kwadratową stopnia n. Pokazać, że $\det A$ jest liczbą cakowitą. Załóżmy dodatkowo, że $a_{ij} = \pm k$, gdzie k jest ustaloną liczbą cakowitą. Pokazać, że $2^{n-1}k^n$ dzieli $\det A$.

(21) Pokazać, że jeśli A jest macierzą antysymetryczn (tzn. $A^T = -A$) stopnia nieparzystego nad $\mathbb{R}$, to jest ona osobliwa, czyli $\det A = 0$.

(22) Liczby 20604, 53227, 25755, 20927 i 289 dzielą się przez 17. Pokazać (bez obliczania), że wyznacznik $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ również dzieli się przez 17.

(23) Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia n. Jak zmieni się wyznacznik macierzy A, jeżeli:

(a) każdy element a_{ij} pomnożymy przez c^{i-j} (c ustalone),

(b) obrócimy macierz A o 90° wokół jej "środka" (zgodnie z ruchem wskazówek zegara),

(c) zapiszemy wiersze (kolumny) macierzy A w odwrotnej kolejności,

(d) do każdej kolumny (wiersza) poczynając od drugiej (drugiego) dodamy poprzednią kolumnę (poprzedni wiersz),

(e) do każdej kolumny (wiersza) poczynając od drugiej (drugiego) dodamy poprzednią kolumnę (poprzedni wiersz), a pierwszej kolumny (do pierwszego wiersza) dodamy starą ostatnią kolumnę (stary ostatni wiersz),

(f) do każdej kolumny (wiersza) poczynając od drugiej (drugiego) dodamy wszystkie porzednie kolumny (poprzednie wiersze).

(24) Znaleźć największą wartość wyznacznika macierzy kwadratowej stopnia 3, której elementy są liczbami całkowitymi równymi

(a) 0 lub 1, (b) -1 lub 1.

(25) Przeanalizować Przykład 6.7 ze stron 158-159 z książki A.Białynickiego-Biruli (dowód wzoru na wyznacznik macierzy klatkowo-trójkątnej $\det \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline D & B \end{array}\right] = \det A \det B$ przez indukcję względem stopnia klatki B).

(26) Sprawdzić tożsamości:

(a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix} = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ i & j \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ i & k \end{vmatrix} \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & d \\ e & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ i & j \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ i & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & d \\ i & l \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ m & o \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & d \\ m & p \end{vmatrix} \end{vmatrix}$

(c) Sformułować i udowodnić ogólne twierdzenie.

(27) Sprawdzić, że nastepująca równość jest tożsamością:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & d \\ e & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ i & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ i & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & d \\ i & l \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ m & o \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & d \\ m & p \end{vmatrix} \end{vmatrix} + (f-j) \begin{vmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ m & o & p \end{vmatrix}$$

(28) Zbadać rozwiązalność układu równań

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 3x - y + 2z = 10 \\ 2x + 7y - 3z = 8 \\ ax - by + cz = 20 \\ ax + by + cz = 44 \\ 10ax + 3by - cz = 26 \end{cases}$$

w zależności od parametrów a, b, c.

(29) Obliczyć wyznacznik macierzy

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 & 3 & 1 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 & 3 & 1 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$,

(b) $B = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix}$.

Wskazówka. Obliczyć wyznaczniki macierzy A^2 oraz BB^T.

(30) Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą wszystkimi pierwiastkami wielomianu $f(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$. Sumy k-tych potęg pierwiastków

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$$

są funkcjami symetrycznymi, więc wyrażają się przez współczynniki wielomianu (np. $s_0 = n$; z wzorów Viète[2] wynikają równości $s_1 = -\frac{a_1}{a_0}$, $s_2 = s_1^2 - 2\sum_{i<j} x_i x_j = \frac{a_1^2}{a_0^2} - 2\frac{a_2}{a_0}$ itd.)

Obliczyć wyznacznik D macierzy

$$\begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{bmatrix}.$$

(*Wskazówka: obliczyć najpierw V^TV, gdzie $V = V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest macierzą Vandermonde'a pierwiastków*).
Wyrazić wynik przez współczynniki wielomianu $f(X)$ gdy $n = 2$ i $f(X) = aX^2 + bX + c$ i gdy $n = 3$, a $f(X) = X^3 + pX + q$.
Wartość $\Delta = a_0^{2n-2}D$ nazywamy *wyróżnikiem wielomianu* $f(X)$[3]

(31) Sprawdzić, czy następujące macierze są odwracalne oraz w przypadku pozytywnej odpowiedzi obliczyć macierz odwrotną:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

(e) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(32) Jeśli $A \in K_n^n$, $B \in K_m^m$, $C \in K_n^m$, $D \in K_m^n$, i $\det A \neq 0$ to

(a) obliczyć $\left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -CA^{-1} & I_m \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} A & D \\ \hline C & B \end{array}\right]$;

(b) wykazać, że $\det \left[\begin{array}{c|c} A & D \\ \hline C & B \end{array}\right] = \det A \cdot \det(B - CA^{-1}D)$;

(c) podzielić na klatki 2×2 macierz z przykładu (d) z poprzedniego zadania; porównać jej wyznacznik z wartością wyrażenia $\det A \det B - \det C \det D$.

(33) Rozwiązać następujące równania macierzowe:

(a) $X \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

(b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

(c) $X \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$,

[2] François Viète (1540-1603) - matematyk francuski, zwany "ojcem algebry". Usystematyzował osiągnięcia algebraiczne Odrodzenia. Wprowadził oznaczenia literowe nie tylko dla niewiadomych, ale i dla danych, np. współczynników równań, dzięki czemu pojawiły sie wzory matematyczne.

[3] Nazwa "wyróżnik" ("discriminant", od łacińskiego *discriminans*, od *discriminantis* - rozdzielający, odróżniający) pochodzi od J. Sylvestera.

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

(34) Rozwiązać układy równań macierzowych:

(a) $\begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \end{cases}$,

(b) $\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \end{cases}$.

(35) Obliczyć $(I + aE_{ir})^{-1}$, $i \neq r$.

(36) Wiadomo, że macierz odwracalną można "sprowadzić" do macierzy jednostkowej za pomocą przekształceń elementarnych na wierszach. Pokazać, że wykonując te same przekształcenia (w tej samej kolejności!) na macierzy jednostkowej otrzymamy macierz odwrotn ą do wyjściowej macierzy. Stosując tę metodę obliczyć jeszcze raz macierze odwrotne do macierzy z poprzednich zadań oraz następujących macierzy:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

(c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(37) (a) Pokazać, że jeżeli $A^2 = 0$, to macierz $I_n + A$ jest odwracalna i $(I_n + A)^{-1} = I_n - A$.
(b) Pokazać, że jeżeli $A^m = 0$, to macierz $I_n + A$ jest odwracalna i znaleźć $(I_n + A)^{-1}$.

(38) Znaleźć kolejne potęgi macierzy $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ i wykorzystać je do obliczenia macierzy odwrotnej do macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(39) Pokazać, że dla $A, B \in K_n^n$ jeżeli macierz $I_n + AB$ jest odwracalna, to również macierz $I_n + BA$ jest odwracalna (lemat Vassersteina [4]) *Wskazówka*: Obliczyć $(I_n + BA)(I_n - B(I_n + AB)^{-1}A)$.

(40) Obliczyć macierze odwrotne do macierzy klatkowych: $\left[\begin{array}{c|c} A & D \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$, $\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & B \end{array}\right]$. Obliczyć macierze odwrotne do następujących macierzy: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(41) *Komutatorem* $[A, B]$ macierzy nieosobliwych $A, B \in GLn(K)$ nazywamy macierz $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$. Wykazać, że

$$[I + aE_{ij}, I + bE_{kl}] = \begin{cases} I & \text{dla } j \neq k \text{ i } i \neq l \\ I + abE_{il} & \text{dla } j = k \text{ i } i \neq l \\ I - abE_{kj} & \text{dla } j \neq k \text{ i } i = l \end{cases}.$$

[4] L. N. Vasserstein, współczesny matematyk radziecki (do lat siedemdziesiątych) i amerykański (od lat osiemdziesiątych).