Zestaw zadań 2: Ciało liczb zespolonych. Układy równań liniowych.

(1) Ile działań można określić na zbiorze n-elementowym? Ile z nich to działania przemienne?
(2) Zbadaj własności działania różnicy symetrycznej ($\div$) w zbiorze $\mathcal{P}(A)$, $A \neq \emptyset$.
(3) Zbadaj własności działania średniej arytmetycznej: $a \bullet b = \frac{a+b}{2}$ w zbiorze $\mathbb{Q}$.
(4) W zbiorze $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiujemy działania $\oplus$ i $\odot$ wzorami

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d),$$

$$(a,b) \odot (c,d) = (ac, bd).$$

Zbadaj własności tych działań. Czy $\odot$ jest rozdzielne względem $\oplus$?. Które elementy mają elementy odwrotne względem działania $\odot$?
(5) Sprawdź, czy podany układ (w którym + oznacza zwykłe dodawanie liczb) jest grupą:
a) $(\mathbb{R},+)$, b) $(\mathbb{N},+)$, c) $(\mathbb{Z},+)$, d) $(\{0,1\},+)$, e) $(<0,\infty),+)$.
(6) Sprawdź, czy podany układ (w którym $\cdot$ oznacza zwykłe mnożenie liczb) jest grupą:
a) $(\mathbb{Z},\cdot)$, b)$(\mathbb{R},\cdot)$, c) $(\{1,1\},\cdot)$, d) $(\mathbb{R}_+,\cdot)$, e) $(\{ak : k \in \mathbb{Z}\},\cdot)$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą różną od zera.
(7) Sprawdź, czy zbiór liczb wymiernych dodatnich $\mathbb{Q}_+$ wraz z działaniem $a * b = 2ab$ tworzy grupę.
(8) Niech m będzie liczbą naturalną. Wykaż, że zbiór $\mathbb{Z}_m = \{0,1,...,m-1\}$ wraz z dodawaniem modulo m (tzn.$a \oplus b = (a+b)_m$) jest grupą abelową. Zbuduj tabelki działań w grupach $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$.
(9) Niech m będzie liczbą naturalną. Wykaż, że zbiór $U(\mathbb{Z}_m) = \{k \in \mathbb{Z}_m : NWD(k,m) = 1\}$ wraz z mnożeniem modulo m (tzn.$a \odot b = (ab)_m$) jest grupą abelową. Zbuduj tabelki działań w grupach $U(\mathbb{Z}_5)$, $U(\mathbb{Z}_6)$, $U(\mathbb{Z}_8)$.
(10) Sprawdź, czy zbiór $\mathbb{Z}_m$ z działaniami modulo m jest ciałem, gdy $m = 5$, $m = 6$, $m = 7$, $m = 8$.
(11) Wyznacz odwrotności niezerowych elementów ciał $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{11}$.
(12) Rozwiąż układy równań a) $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=4 \\ 4x+2y=3 \end{array}\right.$, b) $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y+2z=4 \\ 4x+2y+3z=3 \\ 3x+y+2z=1 \end{array}\right.$, c) $\left\{\begin{array}{l} x+2y+4z=1 \\ 2x+2y+3z=0 \\ 3x+2y+z=4 \end{array}\right.$.
w ciałach $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{11}$.
(13) Wyznacz, jeśli istnieją, pierwiastki kwadratowe z -1 w ciele $\mathbb{Z}_p$ dla $p = 2,3,5,7,11,13$.
(14) Wyznacz pierwiastki równań:
a) $5x^2+5x+1=0$, b) $2x^2+2x+2=0$, c) $2x^3+3x^2+x=0$,
w ciałach $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{11}$, $\mathbb{Z}_{13}$,
(15) Dla jakich wartości parametru m równanie:
a) $mx^2+2mx+(m+1)=0$, b) $3x^2+5x+m=0$, c) $3x^2+mx+(m^2-m)=0$
ma 2 różne pierwiastki w ciele $\mathbb{Z}_{11}$, $\mathbb{Z}_{13}$?
(16) W zbiorze $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiujemy działania $\oplus$ i $\odot$ wzorami

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d),$$

$$(a,b) \odot (c,d) = (ac-bd, ad+bc).$$

Pokaż, że $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ z tymi działaniami jest ciałem.
(17) Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych x, y spełniające równość:
a) $(1+2i)x+(3-5i)y = 1-3i$, b) $(2+3i)x+(4-5i)y = 6-2i$,
c) $(4-3i)2x+(1+i)2y = 7-12i$, d) $\frac{2+i}{3-i}x + \frac{(4-i)^2}{3-i}y = 1+i$.
(18) Rozwiąż układy równań:

a) $\left\{\begin{array}{r} iz+w=2-2i \\ (1-i)z-iw=-1+i \end{array}\right.$, b) $\left\{\begin{array}{r} (1+i)z+2w=i \\ (1-i)z-(1-i)w=-1 \end{array}\right.$.

(19) Rozwiąż równania: a) $z\bar{z}+(\bar{z}-z)=3+2i$, b) $i(\bar{z}+z)+i(z-\bar{z})=2i-3$.

(20) Rozwiąż równania:

a) $z^2+3z+3+i=0$, b) $z^2+(1+4i)z-(5+i)=0$,

c) $z^2+z(1+i)+2i=0$, d) $(4-3i)z^2-(2+11i)z-(5+i)=0$.

(21) Rozwiąż równania:

a) $z^4+2z^2+4=0$, b) $z^4+(15+7i)z^2+8=0$, c) $z^4-(18+4i)z^2+77-36i=0$.

(22) Rozwiąż równania:

a) $(1+i)z^2-(3+7i)z+10i=0$; b) $(1+2i)z^2-(-1+8i)z+(-5+5i)=0$;

c) $(1+2i)z^2-(1+7i)z+(-2+6i)=0$; d) $(1+i)z^2-(1+5i)z+(-2+6i)=0$.

(23) Jakie twory na płaszczyźnie zespolonej określają równania i nierówności:

a) $|z|<2$, b) $|z-1|=3$, c) $|z-1-2i|\le 3$, d) $1<|z|<5$,

e) $|z-c|+|z+c|=2a$, f) $\frac{\pi}{2}<\mathrm{Arg}(z)\le\pi$, g) $|z-i|=|z+i|$,

(24) Przedstaw w postaci trygonometrycznej następujące liczby zespolone:

1, -1, i, $-i$,

$1+i$, $1-i$, $-1+i$, $1+i\sqrt{3}$,

$-1-i\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-i$, $\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$,

(25) Oblicz (podając dokładne wartości części rzeczywistej i urojonej):

a) $\dfrac{(1-i)^{24}}{(\sqrt{3}-i)^{22}}$; b) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^{42}}{(-1+i)^{31}}$; c) $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{36}}{(1+i)^{31}}$; d) $\dfrac{(1-i)^{28}}{(\sqrt{3}+i)^{20}}$;

e) $\dfrac{(1-i)^{28}}{(\sqrt{3}+i)^{20}}$; f) $\dfrac{(-1+i)^{32}}{(-\sqrt{3}+i)^{28}}$; g) $\dfrac{(-1-i)^{28}}{(1-i\sqrt{3})^{20}}$.

(26) Wyznacz pierwiastki zespolone i zaznacz je na płaszczyźnie Gaussa:

$\sqrt{2i}$, $\sqrt{-8i}$, $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[3]{-8i}$, $\sqrt[5]{1}$

(27) Rozwiązać nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych następujące układy równań:

(a) $\left\{\begin{array}{r} 2x-3y+5z+7t=1 \\ 4x-6y+2z+3t=2 \\ 2x-3y-11z-15t=1 \end{array}\right.$; (b) $\left\{\begin{array}{l} 2x+5y-8z=8 \\ 4x+3y-9z=9 \\ 2x+3y-5z=7 \\ x+8y-7z=12 \end{array}\right.$;

(c) $\left\{\begin{array}{r} 3x+4y+z+2t=3 \\ 6x+8y+2z+5t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=13 \end{array}\right.$; (d) $\left\{\begin{array}{r} 3x-5y+2z+4t=2 \\ 7x-4y+z+3t=5 \\ 5x+7y-4z-6t=3 \end{array}\right.$;

(e) $\left\{\begin{array}{l} 3x-2y+5z+4t=2 \\ 6x-4y+4z+3t=3 \\ 9x-6y+3z+2t=4 \end{array}\right.$; (f) $\left\{\begin{array}{r} 8x+6y+5z+2t=21 \\ 3x+3y+2z+t=10 \\ 4x+2y+3z+t=8 \\ 3x+5y+z+t=15 \\ 7x+4y+5z+2t=18 \end{array}\right.$;

(g) $\begin{cases} x+y+3z-2t+3w=1 \\ 2x+2y+4z-t+3w=2 \\ 3x+3y+5z-2t+3w=1 \\ 2x+2y+8z-3t+9w=2 \end{cases}$; (h) $\begin{cases} 2x-y+z+2t+3w=2 \\ 6x-3y+2z+4t+5w=3 \\ 6x-3y+2z+8t+13w=9 \\ 4x-2y+z+t+2w=1 \end{cases}$;

(i) $\begin{cases} 6x+4y+5z+2t+3w=1 \\ 3x+2y+4z+t+2w=3 \\ 3x+2y-2z+t \qquad =-7 \\ 9x+6y+z+3t+2w=2 \end{cases}$.

(28) Następujące układy rozwiązać nad $\mathbb{Q}$ oraz nad $\mathbb{Z}_p$:

(a) $\begin{cases} 2x+7y+3z+t=6 \\ 3x+5y+2z+2t=4 \\ 9x+4y+z+7t=2 \end{cases}$, $p=11$; (b) $\begin{cases} 9x-3y+5z+6t=4 \\ 9x-3y+5z+6t=4 \\ 3x-y+3z+14t=-8 \end{cases}$, $p=13$;

(c) $\begin{cases} 6x+3y+2z+3t+4w=5 \\ 4x+2y+z+2t+w=4 \\ 4x+2y+3z+2t+w=0 \\ 2x+y+7z+3t+2w=1 \end{cases}$, $p=11$ (d) $\begin{cases} 2x-y+3z-7t=5 \\ 6x-3y+z-4t=7 \\ 4x-2y+14z-31t=18 \end{cases}$, $p=37$

(e) $\begin{cases} x+2y+3z-2t+w=4 \\ 3x+6y+5z-4t+3w=5 \\ x+2y+7z-4t+w=11 \\ 2x+4y+2z-3t+3w=6 \end{cases}$, $p=13$ (f) $\begin{cases} 3x+2y+2z+2t=2 \\ 2x+3y+2z+5t=3 \\ 9x+y+4z-5t=1 \\ 2x+2y+3z+4t=5 \\ 7x+y+6z-t=7 \end{cases}$, $p=7$

(g) $\begin{cases} 2x+3y+z+2t=4 \\ 4x+3y+z+t=5 \\ 5x+11y+3z+2t=2 \\ 2x+5y+z+t=1 \\ x-7y-z+2t=7 \end{cases}$, $p=17$

(29) Każdy z następujących układów rozwiązać w ciałach $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{11}$:

(a) $\begin{cases} x+4y+3z=2 \\ 3x+2y+4z=3 \\ 4x+y+z=0 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ x+4y+3z=3 \\ 4x \qquad +3z=2 \end{cases}$.

(30) Pokazać, że układ równań $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ x-y+3z=0 \end{cases}$ jest sprzeczny w ciele $\mathbb{Z}_p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p=2$.

(31) Rozwiązać nad ciałem $\mathbb{C}$ liczb zespolonych układ równań

$$\begin{cases} 6ix+(-3+6i)y+(4+2i)z+(1+2i)t=0 \\ (5+5i)x+(3+5i)y+(7-3i)z+(4+2i)=0 \\ (-3+3i)x+(-6+3i)y+(-1+3i)z \qquad -t=0 \\ (1+11i)x+(1+12i)y+(11+7i)z+7it=0 \end{cases}$$

przy założeniu:

(a) $x=0$, (b) $y=0$, (c) $z=0$, (d) $t=0$, (e) $x+y=0$.

(32) Znaleźć takie liczby rzeczywiste a, b, c, d by zachodziła równość wielomianów zmiennej X o wspóczynnikach rzeczywistych:

$$a \cdot 1 + b(X-2) + c(X-2)^2 + d(X-2)^3 = 1 + X^3.$$

(33) Wyznaczyć takie liczby zespolone a, b, c, d by zachodziła równość funkcji wymiernych zmiennej X o współczynnikach zespolonych:

$$\frac{4}{X^4+4} = \frac{a}{X+1+i} + \frac{b}{X+1-i} + \frac{c}{X-1+i} + \frac{d}{X-1-i}.$$

(34) Rozwiązać nad ciałem $\mathbb{C}$ następujce układy równań:

$$\text{(a)} \begin{cases} (1+i)x + 2iy - z = 3 + 2i \\ (3+i)x + (1-i)y + 4z = 6 + i \\ 5x + y - iz = 2 \end{cases}, \quad \text{(b)} \begin{cases} (1+i)x + 2y - iz = 2 - 3i \\ 3x + iy + (2-i)z = 6 + 4i \\ (4+i)x + y + 3z = 6 + 6i \end{cases}.$$

(35) Dla jakiego parametru $\lambda \in \mathbb{Z}_7$ układ równań $\begin{cases} x + 2y + 6z + 6t = 1 \\ x + y + z + 3t = 2 \\ 3x + 5y + 6z + t = \lambda \end{cases}$ nad ciałem $\mathbb{Z}_7$ ma rozwiązanie? Rozwiązać ten układ, gdy jest to możliwe.

(36) W zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{Q}$ rozwiązać układy równań:

$$\text{(a)} \begin{cases} 8x + 6y + 3z + 2t = 5 \\ -12x - 3y - 3z + 3t = -6 \\ 4x + 5y + z + 4t = 3 \\ \lambda x + 4y + z + 4t = 2 \end{cases}, \quad \text{(b)} \begin{cases} 2x - y + 3z + 4t = 5 \\ 4x - 2y + 5z + 6t = 7 \\ 6x - 3y + 7z + 8t = 9 \\ \lambda x - 4y + 9z + 10t = 11 \end{cases}, \quad \text{(c)} \begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = 1 \\ x + y + \lambda z + t = 1 \\ x + y + z + \lambda t = 1 \end{cases}.$$

(37) Do układu równań należą wszystkie równania $x + ny + nz = 1$ dla $n \in \mathbb{N}$. Znaleźć równoważny mu układ o najmniejszej ilości równań i rozwiązać go.

(38) Z Księgi I "*Arytmetyki*" Diofantosa z Aleksandrii[1] (ok. 250 r.):

(a) "Zadanie 16. Znaleźć trzy takie liczby, aby dodane parami dawały dane liczby. Potrzeba, by połowa sumy danych liczb była większa odkażdej z nich."

(Dla danych a, b, c rozwiązać układ równań $\begin{cases} y + z = a \\ x + z = b \\ x + y = c \end{cases}$).

(b) "Zadanie 17. Znaleźć cztery takie liczby, żeby dodane po trzy dawały dane liczby."

(Dla danych a, b, c, d rozwiązać układ równań $\begin{cases} y + z + t = a \\ x + z + t = b \\ x + y + t = c \\ x + y + z = d \end{cases}$).

(c) "Zadanie 18. Znaleźć trzy takie liczby, aby dodane parami przewyższay pozostałą o daną liczbę."

(Dla danych a, b, c rozwiązać układ równań $\begin{cases} y + z = a + x \\ x + z = b + y \\ x + y = c + z \end{cases}$).

[1]Diofantos (zapewne III w.) - matematyk grecki z Aleksandrii. Brak danych o jego życiu. Zachowało się 6 z 13 ksiąg "*Arytmetyki*" i fragmenty książki o liczbach wieloktnych. W "*Arytmetyce*" Diofantos podał prawa działań na liczbach względnych i wprowadził niewiadomą - symbol literowy uczestniczcy w działaniach na równi z liczbami i w zgodzie z prawami działań.

(d) "Zadanie 19. Znaleźć cztery takie liczby, żeby dodane po trzy przewyższały pozostałą o daną liczbę."

(Dla danych a, b, c, d rozwiązać układ równań $\begin{cases} \quad\ \ y + z + t = a + x \\ x \quad\ + z + t = b + y \\ x + y \quad\ + t = c + z \\ x + y + z \quad\ = d + t \end{cases}$).

(e) "Zadanie 20. Daną liczbę rozłożyć na trzy liczby tak, by każda ze skrajnych, dodana do środkowej miała dany stosunek do pozostałej."

(Dla danych a, k, m rozwiązać układ równań $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + y = kz \\ y + z = mx \end{cases}$).

(f) "Zadanie 22. Znaleźć trzy takie liczby, które staną się równe, gdy każda odda następnej daną swoją część."

(Dla danych niezerowych a, b, c rozwiązać układ równań $\left(1 - \frac{1}{a}\right) x + \frac{1}{c} z = \left(1 - \frac{1}{b}\right) y + \frac{1}{a} x = \left(1 - \frac{1}{c}\right) z + \frac{1}{b} y$).

(39) Wyznaczyć wszystkie rzeczywiste wartości niewiadomych x, y, z, t dla których:

(a) $\begin{cases} x + 4y + 10z + 20t = x \\ -6y - 20z - 45t = y \\ 4y + 15z + 36t = z \\ -y - 4z - 10t = t \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x + 4y + 10z + 20t = -x \\ -6y - 20z - 45t = -y \\ 4y + 15z + 36t = -z \\ -y - 4z - 10t = -t \end{cases}$.

(40) Rozwiązać układ równań $\begin{cases} 20x - 10y + 4z \quad - t = a \\ 70x - 36y + 15z - 4t = b \\ 84x - 45y + 20z - 6t = c \\ 35x - 20y + 10z - 4t = d \end{cases}$ w zależności od parametrów $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.