

6.2. Baza i wymiar.

Definicja 6.6. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F . Podzbiór $B \subset V$ nazywamy **bazą** przestrzeni V , jeżeli:

- (1) B jest liniowo niezależny,
- (2) B jest generujący, tzn. $\text{lin}(B) = V$.

Przykłady:

- (1) Rozważmy przestrzeń $\mathbb{Q}^n$, lub $\mathbb{R}^n$, lub $\mathbb{C}^n$, lub $\mathbb{Z}_p^n$, lub $GF(p^m)^n$, lub, najogólniej, F^n , gdzie F jest dowolnym ciałem. Niech

$$\epsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \epsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \epsilon_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wówczas $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ jest bazą. Nazywamy ją często **bazą kanoniczną**.

(2) Rozważmy przestrzeń $M_n^m(F)$ i niech

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \leftarrow i \quad \begin{matrix} \uparrow \\ j \end{matrix}.$$

Wówczas $(\epsilon_{11}, \dots, \epsilon_{1n}, \epsilon_{21}, \dots, \epsilon_{2n}, \dots, \epsilon_{m1}, \dots, \epsilon_{mn})$ jest bazą.

(3) Rozważmy przestrzeń $F[x]$. Wówczas $(1, x, x^2, x^3, \dots)$ jest bazą.

(4) Rozważmy przestrzeń $\mathbb{C}$ nad ciałem $\mathbb{R}$. Wówczas $(1, i)$ jest bazą.

Twierdzenie 6.7. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $B \subset V$. Następujące warunki są równoważne:

- (1) B jest bazą,
- (2) B jest maksymalnym liniowo niezależnym podzbiorem V .

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2) : Załóżmy, że B jest bazą. Przypuśćmy, że istnieje liniowo niezależny podzbiór $B' \subset V$. Niech $v \in B' \setminus B$. Ponieważ $V = \text{lin}(B)$, więc $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m$, dla pewnych $v_1, \dots, v_m \in B$ oraz $a_1, \dots, a_m \in F$. Wówczas $1 \cdot v - a_1v_1 - \dots - a_mv_m = \theta$ i $1 \neq 0$, a więc B nie jest liniowo niezależny.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Załóżmy, że B jest maksymalnym liniowo niezależnym podzbiorem V . Wystarczy pokazać, że B jest generujący. Ustalmy $v \in V$. Jeśli $v \in B$, to $v \in \text{lin}(B)$. Jeśli $v \notin B$, to $B \cup \{v\}$ jest liniowo zależny, a więc $av + a_1v_1 + \dots + a_mv_m = \theta$ dla pewnych $a, a_1, \dots, a_m \in F$ oraz $v_1, \dots, v_m \in B$. Ponieważ $v_1, \dots, v_m$ są liniowo niezależne, więc $a \neq 0$. Zatem $v = -\frac{a_1}{a}v_1 - \dots - \frac{a_m}{a}v_m \in \text{lin}(B)$. $\square$

Wniosek 6.8. Każda przestrzeń liniowa ma bazę.

Dowód. Jeżeli $V = \{\theta\}$, to zbiór pusty jest bazą. Jeżeli $V \neq \{\theta\}$, to istnieje $\theta \neq v \in V$ i $A = \{v\}$ jest zbiorem liniowo niezależnym. W niepustej rodzinie

$$\mathcal{X} = \{B \subset V : A \subset B \text{ i } B \text{ jest liniowo niezależny}\}$$

uporządkowanej przez inkluzję każdy łańcuch ma ograniczenie górne, a więc wobec lematu Kuratowskiego-Zorna istnieje element maksymalny, który wobec Twierdzenia 6.7 jest bazą. $\square$

Przykład:

- (5) Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{Q}$. Z poprzedniego twierdzenia wynika istnieje bazy tej przestrzeni, jakkolwiek wskazanie jej elementów nie jest możliwe. Bazę tę nazywamy **bazą Hamela**.

Twierdzenie 6.9. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $B \subset V$. Następujące warunki są równoważne:

- (1) B jest bazą,
- (2) B jest generujący i dla każdego $v \in V$ istnieje dokładnie jedna kombinacja liniowa taka, że

$$v = a_1v_1 + \dots + a_mv_m,$$

dla $a_1, \dots, a_m \in F$ i $v_1, \dots, v_m \in B$.

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2) : Ustalmy $v \neq 0$ i przypuśćmy, że

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = a'_1 v'_1 + \dots + a'_n v'_n$$

dla $v_1, \dots, v_m, v'_1, \dots, v'_n \in B$ oraz $a_1, \dots, a_m, a'_1, \dots, a'_n \in F$. Wówczas

$$\theta = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m - a'_1 v'_1 - \dots - a'_n v'_n$$

i ponieważ $v \neq \theta$, nie wszystkie a_i, a'_j są równe 0, skąd $v_1, \dots, v_m, v'_1, \dots, v'_n$ są liniowo zależne. Jest to możliwe, jeśli $n = m$ oraz $v_i = v'_i$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Przypuśćmy, że B jest liniowo zależny. Wówczas

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

dla pewnych $v, v_1, \dots, v_m \in B$ oraz $a_1, \dots, a_m \in F$. Zatem $v = 1 \cdot v$ oraz $v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$ są dwiema kombinacjami liniowymi wektorów z B dającymi v . $\square$

Definicja 6.10. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $B \subset V$. Dla $v \in V$ jednoznacznie wyznaczone skalary $a_1, \dots, a_m \in F$ takie, że dla pewnych $v_1, \dots, v_m \in B$:

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

nazywamy **współrzędnymi** wektora v w bazie B .

Przykłady:

(6) Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Ponieważ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

wieć wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ma w bazie $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ współrzędne $(1, 2, 3)$.

(7) Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Ponieważ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

wieć wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ma w bazie $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ współrzędne $(2, 1, 0)$.

Lemat 6.11. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $v, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n \in V$. Jeżeli $v \in \text{lin}(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n)$ oraz $v \notin \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$, to dla pewnego $i \in \{1, \dots, m\}$:

$$v_i \in \text{lin}(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n).$$

Dowód. Załóżmy, że $v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m + b_1 w_1 + \dots + b_n w_n$, dla pewnych $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in F$. Zauważmy, że istnieje $a_i \neq 0$ dla pewnego $i \in \{1, \dots, m\}$: gdyby $a_1 = \dots = a_m = 0$, to wówczas $v = b_1 w_1 + \dots + b_n w_n \in \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$. Wobec tego:

$$v_i = -\frac{a_1}{a_i} v_1 - \dots - \frac{a_{i-1}}{a_i} v_{i-1} + \frac{1}{a_i} v - \frac{a_{i+1}}{a_i} v_{i+1} - \dots - \frac{a_m}{a_i} v_m - \frac{b_1}{a_i} w_1 - \dots - \frac{b_n}{a_i} w_n.$$

$\square$

Twierdzenie 6.12 (Lemat Steinitza² o wymianie). *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $v, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n \in V$. Załóżmy, że $V = \text{lin}(v_1, \dots, v_m)$ oraz że $w_1, \dots, w_n$ są liniowo niezależne. Wówczas:*

- (1) $n \leq m$,
- (2) istnieją $i_1, i_2, \dots, i_{m-n}$ takie, że

$$V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}})$$

Dowód. Dowód prowadzimy indukcyjnie względem n . Dla $n = 0$ nie ma czego dowodzić. Załóżmy, że jeśli $w_1, \dots, w_n$ są liniowo niezależne, to $n \leq m$ oraz istnieją $i_1, \dots, i_{m-n}$ takie, że $V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}})$. Niech $w_1, \dots, w_{n+1}$ będą liniowo niezależne. Jeśli $n < m$, to $n+1 \leq m$. Jeśli $n = m$, to wobec założenia indukcyjnego $V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$ i stąd $w_{n+1} \in \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$, a więc $w_1, \dots, w_n, w_{n+1}$ nie mogą być liniowo niezależne.

Pozostaje wykazać część (2) twierdzenia. Wobec założenia indukcyjnego:

$$w_{n+1} \in V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}}).$$

Ponadto $w_{n+1} \notin \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$. Wobec Lematu 6.11, po ewentualnej zmianie notacji

$$v_{i_{m-n}} \in \text{lin}(w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n-1}}).$$

Zauważmy, że ponieważ każdy z wektorów $w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}}$ jest kombinacją liniową wektorów $w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n-1}}$ oraz ponieważ $V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}})$, więc w konsekwencji

$$V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n-1}}).$$

□

Wniosek 6.13. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F . Jeżeli n -elementowy układ jest bazą przestrzeni V , to każda baza tej przestrzeni składa się z dokładnie n wektorów.*

Dowód. Niech $(w_1, \dots, w_n)$ i $(v_1, \dots, v_m)$ będą bazami. Wówczas układ $(v_1, \dots, v_m)$ jest liniowo niezależny, a $(w_1, \dots, w_n)$ generujący, więc z lematu Steinitza $m \leq n$. Przez symetrię $n \leq m$. □

Definicja 6.14. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F . Liczbę elementów dowolnej skończonej bazy przestrzeni V nazywamy **wymiarem** i oznaczamy $\dim V$. Jeżeli nie istnieje skończona baza danej przestrzeni, przyjmujemy $\dim V = \infty$.*

Twierdzenie 6.15. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V = n$. Wówczas jeżeli $U < V$, to $\dim U \leq n$.*

Dowód. Wobec lematu Steinitza każdy liniowo niezależny podzbiór V ma co najwyżej n elementów. Ponadto każdy liniowo niezależny podzbiór U jest liniowo niezależnym podzbiorem V , a więc ma co najwyżej n elementów. W szczególności baza U ma co najwyżej n elementów, a więc $\dim U \leq n$. □

Wniosek 6.16. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V = n$. Niech $U < V$. Następujące warunki są równoważne:*

- (1) $U = V$,
- (2) $\dim U = n$.

²Ernst Steinitz (1871-1928) urodzony w Laurahütte, dziś część Siemianowic Śląskich.

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2) : Jeżeli $U = V$, to oczywiście $\dim U = n$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Załóżmy, że $(v_1, \dots, v_n)$ jest bazą U . Bazę tę można uzupełnić do bazy V . Ale baza V będzie miała n elementów, a zatem $(v_1, \dots, v_n)$ jest bazą V . $\square$

Definicja 6.17. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $v_1, \dots, v_n \in V$, niech $a_1, \dots, a_n \in F$. Równość postaci

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \theta$$

nazywamy **zależnością** między $v_1, \dots, v_n$. Ciągi współczynników $(a_1, \dots, a_n)$ odpowiadających wszystkim zależnościom między $v_1, \dots, v_n$ tworzą podzbiór przestrzeni F^n oznaczany przez $\mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$ i nazywany **zbiorem zależności** między $v_1, \dots, v_n$.

Twierdzenie 6.18. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $v_1, \dots, v_n \in V$. Wówczas zbiór zależności $\mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$ jest podprzestrzenią przestrzeni F^n oraz

$$\dim \mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n) = n - \dim \text{lin}(v_1, \dots, v_n).$$

Dowód. Sprawdzenie, że $\mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$ jest podprzestrzenią pozostawiamy Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie. Niech $r = \dim \text{lin}(v_1, \dots, v_n)$. Wówczas każdy maksymalny liniowo niezależny podzbiór zbioru $\{v_1, \dots, v_n\}$ składa się z r elementów. Możemy założyć, że $v_1, \dots, v_r$ są liniowo niezależne. Wówczas

$$v_{r+i} = a_{i1}v_1 + \dots + a_{ir}v_r$$

dla pewnych $a_{i1}, \dots, a_{ir} \in F$, $i \in \{1, \dots, n-r\}$. Pokażemy, że

$$\begin{aligned} & (a_{11}, \dots, a_{1r}, -1, 0, \dots, 0), \\ & (a_{21}, \dots, a_{2r}, 0, -1, \dots, 0), \\ & \vdots \\ & (a_{n-r,1}, \dots, a_{n-r,r}, 0, 0, \dots, -1) \end{aligned}$$

tworzą bazę przestrzeni $\mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$. Ponieważ

$$a_{i1}v_1 + \dots + a_{ir}v_r - v_{r+i} = \theta$$

więc $(a_{i1}, \dots, a_{ir}, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$. Załóżmy, że

$$\begin{aligned} (0, \dots, 0) &= x_1(a_{11}, \dots, a_{1r}, -1, 0, \dots, 0) \\ &+ x_2(a_{21}, \dots, a_{2r}, 0, -1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ &+ x_{n-r}(a_{n-r,1}, \dots, a_{n-r,r}, 0, 0, \dots, -1). \end{aligned}$$

W szczególności dla współrzędnej $n-r+i$:

$$-x_i = 0,$$

a więc $x_1 = \dots = x_{n-r} = 0$ i wektory są liniowo niezależne. Ustalmy $(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$. Wówczas

$$\begin{aligned} & (a_1, \dots, a_n) + a_1(a_{11}, \dots, a_{1r}, -1, 0, \dots, 0) \\ & + a_2(a_{21}, \dots, a_{2r}, 0, -1, \dots, 0) \\ & \vdots \\ & + a_n(a_{n-r,1}, \dots, a_{n-r,r}, 0, 0, \dots, -1) \\ & = (a_1 + a_1a_{11} + \dots + a_na_{n-r,1}, \dots, (a_r + a_1a_{1r} + \dots + a_na_{n-r,r}), 0, \dots, 0) \\ & \in \mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n), \end{aligned}$$

a zatem

$$(a_1 + a_1a_{11} + \dots + a_na_{n-r,1})v_1 + \dots + (a_r + a_1a_{1r} + \dots + a_na_{n-r,r})v_r = \theta.$$

Ponieważ $v_1, \dots, v_r$ są liniowo niezależne, więc

$$a_1 + a_1a_{11} + \dots + a_na_{n-r,1} = \dots = a_r + a_1a_{1r} + \dots + a_na_{n-r,r} = 0$$

i tym samym

$$\begin{aligned} & (a_1, \dots, a_n) = -a_1(a_{11}, \dots, a_{1r}, -1, 0, \dots, 0) \\ & - a_2(a_{21}, \dots, a_{2r}, 0, -1, \dots, 0) \\ & \vdots \\ & - a_n(a_{n-r,1}, \dots, a_{n-r,r}, 0, 0, \dots, -1). \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 6.19. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $U_1, U_2 < V$, $\dim U_1 < \infty$, $\dim U_2 < \infty$. Wówczas $\dim(U_1 \cap U_2) < \infty$, $\dim(U_1 + U_2) < \infty$ oraz

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2.$$

Dowód. Ponieważ $U_1 \cap U_2 \subset U_1$ oraz $\dim U_1 < \infty$, więc $\dim(U_1 \cap U_2) < \infty$. Niech $(v_1, \dots, v_k)$ będzie bazą $U_1 \cap U_2$. Możemy uzupełnić ją do bazy $(v_1, \dots, v_k, \dots, v_n)$ podprzestrzeni U_1 i do bazy $(v_1, \dots, v_k, \dots, w_m)$ podprzestrzeni U_2 . Oczywiście $\text{lin}(v_1, \dots, v_k, \dots, v_n, \dots, w_m) = U_1 + U_2$. Pokażemy, że wektory $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n, w_{k+1}, \dots, w_m)$ są liniowo niezależne.

Założmy, że $a_1v_1 + \dots + a_nv_n + b_{k+1}w_{k+1} + \dots + b_mw_m = \theta$ dla pewnych $a_1, \dots, a_n, b_{k+1}, \dots, b_m \in F$. Wówczas

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n = -b_{k+1}w_{k+1} - \dots - b_mw_m \in U_2,$$

a więc $a_1v_1 + \dots + a_nv_n \in U_1 \cap U_2$. Tym samym $a_{k+1} = \dots = a_n = 0$, a więc $a_1v_1 + \dots + a_kv_k + b_{k+1}w_{k+1} + \dots + b_mw_m = \theta$ i skoro $(v_1, \dots, v_k, \dots, w_m)$ są liniowo niezależne, więc również $a_1 = \dots = a_k = b_{k+1} = \dots = b_m = 0$. □

Wniosek 6.20. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V < \infty$, niech $U_1, U_2 < V$. Wówczas

$$\dim(U_1 \cap U_2) \geq \dim U_1 + \dim U_2 - n$$

gdzie $\dim V = n$.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że $\dim(U_1 + U_2) \leq n$. □

Definicja 6.21. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V < \infty$. **Hiperpłaszczyzną** nazywamy każdą podprzestrzeń przestrzeni V o wymiarze $n - 1$.

Twierdzenie 6.22. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V = n$. Niech $U < V$ i niech $\dim U = k$. Wówczas U jest częścią wspólną $n - k$ hiperpłaszczyzn.*

Dowód. Niech $(v_1, \dots, v_k)$ będzie bazą U . Możemy uzupełnić ją do bazy $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ przestrzeni V . Niech $W_i = \text{lin}(v_1, \dots, v_{k+i-1}, v_{k+i+1}, \dots, v_n)$, $i \in \{1, \dots, n - k\}$. Pokażemy, że $U = W_1 \cap \dots \cap W_{n-k}$.

Oczywiście $U = \text{lin}(v_1, \dots, v_k) \subset W_1 \cap \dots \cap W_{n-k}$. Ustalmy $v \in W_1 \cap \dots \cap W_{n-k}$. Niech $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ dla pewnych $a_1, \dots, a_n \in F$. Ustalmy $i \in \{1, \dots, n - k\}$. Wówczas $v \in W_i$, a więc $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in W_i$. Tym samym $a_{k+i} = 0$. $\square$

Twierdzenie 6.23. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V = n$. Niech $W_1, \dots, W_l$ będą hiperpłaszczyznami. Wówczas*

$$\dim(W_1 \cap \dots \cap W_l) \geq n - l.$$

Dowód. Dla $l = 1$ nie ma czego dowodzić. Załóżmy, że $l > 1$ i że dla l hiperpłaszczyzn rezultat jest prawdziwy. Niech $W_1, \dots, W_{l+1}$ będą hiperpłaszczyznami. Wówczas $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_l) \geq n - l$. Wobec Wniosku 6.20 $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_l \cap W_{l+1}) \geq \dim(W_1 \cap \dots \cap W_l) + n - 1 - n \geq n - l - 1 = n - (l + 1)$. $\square$

Wniosek 6.24. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V = n$. Niech $U < V$ i niech $\dim U = k$. Wówczas U jest częścią wspólną $n - k$, ale nie mniejszej liczby hiperpłaszczyzn.*

7. WYKŁAD 7: STRUKTURA ZBIORU ROZWIĄZAŃ UKŁADU RÓWNAŃ.

Definicja 7.1. Niech F będzie ciałem, niech $\mathcal{U}_0$ będzie układem jednorodnym m równań liniowych o n niewiadomych i współczynnikach z ciała F . Niech U_0 będzie podprzestrzenią F^n rozwiązań układu $\mathcal{U}_0$. Każdą bazę U_0 będziemy nazywać **układem fundamentalnym** rozwiązań układu $\mathcal{U}_0$, a każde przedstawienie parametryczne U_0 **rozwiązaniem ogólnym** układu $\mathcal{U}_0$.

Niech $\mathcal{U}$ będzie układem m równań liniowych o n niewiadomych i współczynnikach z ciała F . Niech W będzie warstwą podprzestrzeni przestrzeni F^n wyznaczoną przez rozwiązania układu $\mathcal{U}$. Każde przedstawienie parametryczne W nazywamy **rozwiązaniem ogólnym** układu $\mathcal{U}$.

Twierdzenie 7.2. Niech F będzie ciałem, niech $U < F^n$ będzie wyznaczona przez równanie $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$, dla pewnych $a_1, \dots, a_n \in F$ nie wszystkich równych zeru. Wówczas U jest hiperpłaszczyzną.

Dowód. Załóżmy, że $a_1 \neq 0$. Wówczas $e_1 \notin U$, a więc $\dim U \leq n - 1$. Ponadto $e_2 - \frac{a_2}{a_1}e_1, e_3 - \frac{a_3}{a_1}e_1, \dots, e_n - \frac{a_n}{a_1}e_1 \in U$ i wszystkie te wektory są liniowo niezależne. $\square$

Wniosek 7.3. Niech F będzie ciałem, niech $U < F^n$ będzie wyznaczona przez układ m równań jednorodnych o n niewiadomych. Wówczas $\dim U \geq n - m$.

Dowód. Wynika wprost z Twierdzeń 7.2 i ?? $\square$

Twierdzenie 7.4. Niech F będzie ciałem, niech $U < F^n$ będzie hiperpłaszczyzną. Wówczas U jest wyznaczona przez równanie $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$, dla pewnych $a_1, \dots, a_n \in F$ nie wszystkich równych zeru.

Dowód. Załóżmy, że $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ jest bazą podprzestrzeni U . Niech

$$\alpha_i = [a_{i1}, \dots, a_{in}], \text{ dla } i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Rozważmy układ równań

$$\mathcal{U}_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n-1,1}x_1 + \dots + a_{n-1,n}x_n = 0 \end{cases}$$

i niech U_0 oznacza podprzestrzeń rozwiązań układu $\mathcal{U}_0$. Wobec Wniosku 7.3 $\dim U_0 \geq n - (n-1) = 1$, niech zatem $\theta \neq [b_1, \dots, b_n] \in U_0$. Podprzestrzeń W wyznaczona przez równanie $b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 0$ jest hiperpłaszczyzną wobec Twierdzenia 7.2. Ponadto, wobec określenia $[b_1, \dots, b_n], \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in W$ i tym samym $U = \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \subset W$. Ponieważ $\dim U = \dim W = n - 1$ oznacza to, że $U = W$. $\square$

Wniosek 7.5. Niech F będzie ciałem, niech $U < F^n$ będzie podprzestrzenią k -wymiarową. Wówczas U jest wyznaczona przez układ złożony z $n - k$, ale nie mniej, jednorodnych równań liniowych.

Dowód. Wynika wprost z Twierdzenia 7.6 i Wniosku ?? $\square$

Twierdzenie 7.6. Niech F będzie ciałem, niech $W_1, \dots, W_k < F^n$ będą hiperpłaszczyznami. Niech $l_i = 0$ będzie równaniem hiperpłaszczyzny W_i , $l_i \in F_h[x_1, \dots, x_n]$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Wówczas $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) = n - k$ wtedy i tylko wtedy, gdy formy liniowe $l_1, \dots, l_k$ są liniowo niezależne.

Dowód. Załóżmy, że formy $l_1, \dots, l_k$ są liniowo zależne. Wobec Twierdzenia ?? jedna z tych form jest kombinacją liniową pozostałych – możemy założyć, że l_k jest kombinacją liniową form $l_1, \dots, l_{k-1}$. Wówczas układy

$$\begin{cases} l_1 = 0 \\ \vdots \\ l_k = 0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} l_1 = 0 \\ \vdots \\ l_{k-1} = 0 \end{cases}$$

mają identyczne zbiory rozwiązań, a więc $W_1 \cap \dots \cap W_k = W_1 \cap \dots \cap W_{k-1}$. Wobec Twierdzenia ??, $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_{k-1}) \geq n - k - 1 = n - k + 1 > n - k$, więc $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) > n - k$. Wobec Twierdzenia ?? i prawa kontrapozycji udowodniliśmy zatem, że jeżeli $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) = n - k$, to formy $l_1, \dots, l_k$ są liniowo niezależne.

Założmy, że formy $l_1, \dots, l_k$ są liniowo niezależne. Układ $(l_1, \dots, l_k)$ uzupełniamy do bazy $(l_1, \dots, l_k, \dots, l_n)$ przestrzeni liniowej $F_h[x_1, \dots, x_n]_1$ form liniowych n zmiennych. Niech W_i będzie hiperpłaszczyzną wyznaczoną przez równanie $l_i = 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Pokażemy, że $W_1 \cap \dots \cap W_n = \{\theta\}$. Ponieważ $l_1, \dots, l_n$ generują przestrzeń $F_h[x_1, \dots, x_n]_1$, więc formy $x_1, \dots, x_n$ są kombinacjami liniowymi form $l_1, \dots, l_n$. Tym samym każdy wektor będący rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} l_1 = 0 \\ \vdots \\ l_n = 0 \end{cases}$$

jest też rozwiązaniem układu $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$, a więc $W_1 \cap \dots \cap W_n \subset \{\theta\}$ i tym samym $W_1 \cap \dots \cap W_n = \{\theta\}$.

W szczególności $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_n) = 0$. Ponieważ $\dim(W_{k+1} \cap \dots \cap W_n) \geq n - (n - k) = k$, więc wobec Wniosku 6.20

$$\begin{aligned} 0 &= \dim(W_1 \cap \dots \cap W_n) \geq \dim[(W_1 \cap \dots \cap W_k) \cap (W_{k+1} \cap \dots \cap W_n)] \\ &\geq \dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) + \dim(W_{k+1} \cap \dots \cap W_n) - n \\ &\geq \dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) + k - n, \end{aligned}$$

czyli $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) \leq n - k$ i tym samym, wobec Twierdzenia ??, $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) = n - k$. $\square$

Wniosek 7.7. Niech F będzie ciałem, niech $l_1, \dots, l_k \in F_h[x_1, \dots, x_n]_1$, niech $U < F^n$ będzie podprzestrzenią wyznaczoną przez układ równań

$$\mathcal{U}_0 : \begin{cases} l_1 = 0 \\ \vdots \\ l_k = 0. \end{cases}$$

Wówczas $\dim U = n - \dim \text{lin}(l_1, \dots, l_k)$

Dowód. Niech $\dim \text{lin}(l_1, \dots, l_k) = r$ i niech $l_{i_1}, \dots, l_{i_r}$ będzie maksymalnym liniowo niezależnym podzbiorem $\{l_1, \dots, l_k\}$. Wówczas U jest wyznaczona przez układ

$$\begin{cases} l_{i_1} = 0 \\ \vdots \\ l_{i_r} = 0. \end{cases}$$

i wobec Twierdzenia 7.6 $\dim U = n - r = n - \dim \text{lin}(l_1, \dots, l_k)$. $\square$

Definicja 7.8. Niech F będzie ciałem. Niech $A = [a_{ij}] \in M_m^n(F)$. Oznaczmy $\beta_i = [a_{i1} \ \dots \ a_{in}]$, dla $i \in \{1, \dots, m\}$, tak aby

$$A = \left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{array} \right].$$

Oznaczmy ponadto:

$$\alpha_j = \left[\begin{array}{c} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{array} \right], \text{ dla } j \in \{1, \dots, n\},$$

tak aby $A = [\alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_n]$. Liczbę $\dim \text{lin}(\beta_1, \dots, \beta_m)$ nazywamy **rzędem wierszowym** macierzy A , a liczbę $\dim \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ nazywamy **rzędem kolumnowym** macierzy A .

Twierdzenie 7.9. Niech F będzie ciałem, niech $A = [a_{ij}] \in M_m^n(F)$. Rząd kolumnowy macierzy A równy jest jej rzędowi wierszowemu.

Dowód. Oznaczmy $\beta_i = [a_{i1} \ \dots \ a_{in}]$, dla $i \in \{1, \dots, m\}$, tak aby

$$A = \left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{array} \right]$$

oraz

$$\alpha_j = \left[\begin{array}{c} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{array} \right], \text{ dla } j \in \{1, \dots, n\},$$

tak aby $A = [\alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_n]$. Podprzestrzeń $\mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ przestrzeni F^n jest identyczna z podprzestrzenią rozwiązań układu

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Wobec Twierdzenia ??:

$$\dim \mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = n - \dim \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Wobec Wniosku 7.7:

$$\dim \mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = n - \dim \text{lin}(l_1, \dots, l_m),$$

gdzie $l_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \in F_h[x_1, \dots, x_n]_1$, dla $i \in \{1, \dots, m\}$. Przekształcenie $\phi : F_h[x_1, \dots, x_n]_1 \rightarrow F^n$ dane wzorem

$$\phi(c_1x_1 + \dots + c_nx_n) = [c_1, \dots, c_n]$$

jest izomorfizmem przestrzeni liniowych, a więc $\dim \text{lin}(l_1, \dots, l_m) = \dim \text{lin}(\beta_1, \dots, \beta_m)$. Reasumując:

$$n - \dim \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \dim \mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = n - \dim \text{lin}(l_1, \dots, l_m) = n - \dim \text{lin}(\beta_1, \dots, \beta_m),$$

a więc $\dim \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \dim \text{lin}(\beta_1, \dots, \beta_m)$. $\square$

Definicja 7.10. Niech F będzie ciałem, niech $A = [a_{ij}] \in M_m^n(F)$. Wspólną wartość rzędu kolumnowego i rzędu wierszowego macierzy A nazywamy **rzędem** macierzy A i oznaczamy $r(A)$.

Wniosek 7.11. Niech F będzie ciałem, niech $A = [a_{ij}] \in M_m^n(F)$. Wartość $r(A)$ nie ulegnie zmianie, jeżeli na kolumnach lub wierszach macierzy A wykonamy operacje elementarne typu 1, 2 lub 3.

Przykład:

- (1) Powyższy wniosek daje praktyczną metodę znajdowania rzędu macierzy: najpierw sprowadzamy przez operacje elementarne daną macierz do postaci trójkątnej, a następnie zliczamy niezerowe wiersze lub kolumny. Dla przykładu obliczymy rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Mamy kolejno:

$$\begin{aligned} r(A) &= r \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{matrix} w_2 - 3w_1 \\ w_3 - 7w_1 \\ w_4 - w_1 \end{matrix} = r \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{matrix} \\ w_2 : (-2) \\ \\ k_2 - k_1 \quad k_3 - 2k_1 \quad k_4 - k_1 \end{matrix} \\ &= r \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{matrix} \\ w_3 + w_2 \\ \\ \end{matrix} = r \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{matrix} \\ \\ w_3 \downarrow \\ w_4 \uparrow \end{matrix} \\ &= r \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \end{bmatrix} \right) \begin{matrix} \\ \\ \\ w_4 + 12w_3 \end{matrix} = r \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \right) = 4, \end{aligned}$$

gdyż wektory $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 30 \end{bmatrix}$ (lub, symetrycznie, $[1, 0, 0, 0]$, $[0, 1, 0, 0]$, $[0, 0, 1, 3]$, $[0, 0, 0, 30]$) są liniowo niezależne.

Wniosek 7.12. Niech F będzie ciałem, niech $A = [a_{ij}] \in M_m^n(F)$. Wówczas $r(A) = r(A^T)$.

Wniosek 7.13. Niech F będzie ciałem, niech

$$\mathcal{U}_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

będzie układem m jednorodnych równań liniowych o współczynnikach z ciała F , niech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

niech $U_0 < F^n$ będzie podprzestrzenią rozwiązań układu $\mathcal{U}_0$. Wówczas

$$\dim U_0 = n - r(A).$$

Dowód. Wynika wprost z przyjętych definicji i z Wniosku 7.7. □

Wniosek 7.14 (twierdzenie Kroneckera-Capelliego). *Niech F będzie ciałem, niech*

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \mathcal{U}_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

będą układami m równań liniowych o współczynnikach z ciała F i m jednorodnych równań liniowych o współczynnikach z ciała F otrzymanym z równań układu $\mathcal{U}$ przez zastąpienie prawych stron zerami, niech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad A_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

niech $U_0 < F^n$ będzie podprzestrzenią rozwiązań układu $\mathcal{U}_0$. Wówczas układ $\mathcal{U}$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_0)$. Ponadto jeśli układ $\mathcal{U}$ ma choć jedno rozwiązanie, to wówczas zbiór wszystkich rozwiązań jest warstwą podprzestrzeni U_0 , przy czym $\dim U_0 = n - r(A)$. W szczególności układ ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_0) = n$.

Dowód. Wystarczy udowodnić, że układ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_0)$ – pozostałe tezy twierdzenia wynikają z Twierdzenia ?? i Wniosku 7.13. Oznaczmy

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad \text{dla } j \in \{1, \dots, n\}, \quad \text{oraz} \quad \alpha_j = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

tak, aby $A = [\alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_n \mid \beta]$. Układ $\mathcal{U}$ możemy zapisać wektorowo jako

$$\mathcal{U}_w : x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n = \beta.$$

Elementy $a_1, \dots, a_n \in F$ są rozwiązaniem układu $\mathcal{U}_w$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n = \beta$, a zatem wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta \in \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, a zatem wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)$, a zatem wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \dim \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)$ (jako że $\text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \subset \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)$), czyli gdy $r(A_0) = r(A)$. □

Twierdzenie 7.15. *Niech F będzie ciałem, niech*

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \mathcal{U}_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

niech ponadto

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad A_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

Wówczas układ $\mathcal{U}$ jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_0)$.

Dowód. Wcześniej zauważyliśmy (Wniosek ??), że układ sprzeczny nie ma rozwiązań, a zatem, wobec twierdzenia Kroneckera-Capelliego, $r(A) \neq r(A_0)$. Pozostaje sprawdzić, że jeśli układ jest niesprzeczny, to $r(A) = r(A_0)$. Załóżmy, że $r(A) \neq r(A_0)$. Niech $\beta_i = [a_{i1} \dots a_{in}]$, dla $i \in \{1, \dots, m\}$, i niech $\beta'_i = [a_{i1} \dots a_{in} \ b_i]$, dla $i \in \{1, \dots, m\}$, tak aby

$$A_0 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad A = \begin{bmatrix} \beta'_1 \\ \vdots \\ \beta'_m \end{bmatrix}.$$

Niech ponadto

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad \text{dla } j \in \{1, \dots, n\}, \quad \text{oraz } \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

tak, aby $A = [\alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_n \mid \beta]$. Wówczas:

$\dim \text{lin}(\beta_1, \dots, \beta_m) = r(A_0) = \dim \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq \dim \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta) = r(A) = \dim \text{lin}(\beta'_1, \dots, \beta'_m)$, a zatem $r(A_0) < r(A)$. Istnieją zatem liczby naturalne $i_1, \dots, i_s$ takie, że wektory $\beta'_{i_1}, \dots, \beta'_{i_s}$ są liniowo niezależne, a wektory $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_s}$ są liniowo zależne. Tym samym istnieją $a_1, \dots, a_s \in F$ takie, że

$$a_1 \beta'_{i_1} + \dots + a_s \beta'_{i_s} \neq \theta \quad \text{oraz} \quad a_1 \beta_{i_1} + \dots + a_s \beta_{i_s} = \theta.$$

Tym samym $a_1 \beta'_{i_1} + \dots + a_s \beta'_{i_s} = [0, 0, \dots, 0, a]$, dla pewnego $a \neq 0$. Wobec tego mnożąc i_j -te równanie układu $\mathcal{U}$ przez a_j , dla $j \in \{1, \dots, s\}$, a następnie dodając tak zmodyfikowane równania stronami, otrzymujemy $0 = a$. $\square$