

5. WYKŁAD 5.

5.1. Przestrzenie liniowe i podprzestrzenie.

Definicja 5.1. Niech F będzie ciałem. Algebrę $(V, F, +, \cdot)$, gdzie $V \neq \emptyset$, $+$ jest działaniem w zbiorze V zwanym **dodawaniem wektorów**, $a \cdot$ jest działaniem zewnętrznym ciała F na V zwanym **mnożeniem przez skalar** nazywamy **przestrzenią liniową** (lub **wektorową**), jeżeli:

- (1) $\forall v, w, u \in V [v + (u + w) = (v + u) + w]$,
- (2) $\forall v, w \in V [v + w = w + v]$,
- (3) $\forall v \in V \exists w \in V [v + w = \theta]$, gdzie θ jest pewnym ustalonym elementem V ,
- (4) $\forall v \in V [v + \theta = \theta + v = v]$,
- (5) $\forall a, b \in F \forall v \in V [(a + b)v = av + bv]$,
- (6) $\forall a \in F \forall v, w \in V [a(v + w) = av + aw]$,
- (7) $\forall a, b \in F \forall v \in V [a(bv) = (ab)v]$,
- (8) $\forall v \in V [1 \cdot v = v]$.

Elementy zbioru V tradycyjnie nazywamy **wektorami**.

Przykłady:

- (1) Niech E będzie płaszczyzną euklidesową, niech $P \in E$ będzie ustalonym punktem niech

$$S_P(E) = \{\overrightarrow{PQ} : Q \in E\}$$

będzie zbiorem wektorów zaczepionych w punkcie P . Wówczas $(S_P(E), \mathbb{R}, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ jest działaniem dodawania wektorów na płaszczyźnie zgodnie z regułą równoległoboku, a $\cdot$ jest działaniem mnożenia wektorów przez skalary rzeczywiste.

- (2) Szczególnym przypadkiem powyższej konstrukcji jest przestrzeń $(S_{(0,0)}(E), \mathbb{R}, +, \cdot)$ wektorów zaczepionych w początku układu współrzędnych $(0, 0)$.
- (3) Uogólnieniem poprzedniego przykładu jest **przestrzeń współrzędnych**. Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $n \in \mathbb{N}$, niech

$$F^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} : a_1, \dots, a_n \in F \right\}.$$

Wówczas $(F^n, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ oraz $\cdot$ są działaniami zdefiniowanymi wzorami:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad a \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_n \end{bmatrix}.$$

- (4) Wektory przestrzeni współrzędnych wygodnie jest czasem zapisywać poziomo zamiast pionowo. Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $n \in \mathbb{N}$, niech

$$F_n = \{[a_1, \dots, a_n] : a_1, \dots, a_n \in F\}.$$

Wówczas $(F_n, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ oraz $\cdot$ są działaniami zdefiniowanymi wzorami:

$$[a_1, \dots, a_n] + [b_1, \dots, b_n] = [a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n]$$

oraz

$$a[a_1, \dots, a_n] = [aa_1, \dots, aa_n].$$

- (5) Niech F będzie dowolnym ciałem. Wówczas $(M_n^m(F), F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ oraz $\cdot$ są działaniami dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez skalar.

- (6) Niech F będzie dowolnym ciałem, niech

$$F^\infty = \{(a_1, a_2, \dots) : a_i \in F, \text{ dla } i \in \mathbb{N}\}$$

będzie zbiorem ciągów elementów ciała F . Wówczas $(F^\infty, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ oraz $\cdot$ są działaniami zdefiniowanymi wzorami:

$$(a_1, a_2, \dots) + (b_1, b_2, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$$

oraz

$$a(a_1, a_2, \dots) = (aa_1, aa_2, \dots).$$

- (7) Niech F będzie dowolnym ciałem, niech

$$F^{(\infty)} = \{(a_1, a_2, \dots) : a_i \in F, \text{ dla } i \in \mathbb{N}, a_i = 0 \text{ dla prawie wszystkich } i \in \mathbb{N}\}$$

będzie zbiorem ciągów elementów ciała F o skończonej liczbie niezerowych wyrazów. Wówczas $(F^{(\infty)}, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ oraz $\cdot$ są działaniami zdefiniowanymi jak w poprzednim przykładzie.

- (8) Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $A \neq \emptyset$ będzie niepustym zbiorem, niech

$$F^A = \{f : A \rightarrow F : f \text{ jest funkcją}\}$$

będzie zbiorem wszystkich funkcji ze zbioru A w ciało F . Wówczas $(F^A, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami zdefiniowanymi następująco:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ dla } x \in A,$$

oraz

$$(a \cdot f)(x) = af(x), \text{ dla } x \in A.$$

- (9) Szczególnym przypadkiem poprzedniego przykładu jest sytuacja, w której zbiór $A = \{x\}$ jest jednoelementowy. Zbiór F^A oznaczamy wówczas F^x i przestrzeń $(F^x, F, +, \cdot)$ definiujemy przez działania jak w poprzednim przykładzie.

- (10) Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem na prostej rzeczywistej, niech

$$C_n(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f^{(n)} \text{ jest ciągła}\}$$

będzie zbiorem wszystkich funkcji rzeczywistych na przedziale I , których n -ta pochodna jest ciągła. Wówczas $(C_n(I), \mathbb{R}, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie działania $+$ i $\cdot$ definiujemy jak w poprzednich dwóch przykładach.

- (11) Niech F będzie dowolnym ciałem. Wówczas $(F[x], F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez skalar.

- (12) Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $n \in \mathbb{N}$ i niech

$$F[x]_n = \{f \in F[x] : \deg f \leq n\}$$

będzie zbiorem wielomianów stopnia co najwyżej n . Wówczas $(F[x]_n, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez skalar.

- (13) Niech F będzie dowolnym ciałem. Wówczas $(F[x_1, \dots, x_n], F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez skalar.

(14) Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $m \in \mathbb{N}$ i niech

$$F[x_1, \dots, x_n]_m = \{f \in F[x_1, \dots, x_n] : \deg f \leq m\}$$

będzie zbiorem wielomianów stopnia co najwyżej m . Wówczas $(F[x_1, \dots, x_n]_m, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez skalar.

- (15) Rozważmy ciała $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Wówczas $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami dodawania liczb rzeczywistych i mnożenia liczb rzeczywistych przez liczby wymierne. Podobnie $(\mathbb{C}, \mathbb{Q}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ są przestrzeniami liniowymi.
- (16) Powyższy przykład można uogólnić jak następuje: niech F i E będą dowolnymi ciałami, przy czym $F \subset E$. Wówczas $(E, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami dodawania w ciele E i mnożenia elementów ciała E przez elementy podciała F .
- (17) Szczególny przypadek poprzedniego przykładu zachodzi, gdy $E = F$. Wówczas $(F, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową ciała F nad samym sobą.
- (18) Niech $(V_i, F, +_i, \cdot_i)$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$, będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem F . Wówczas $(V_1 \times \dots \times V_n, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową gdzie $+$ i $\cdot$ są działaniami zdefiniowanymi następująco:

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) + (w_1, w_2, \dots, w_n) = (v_1 +_1 w_1, v_2 +_2 w_2, \dots, v_n +_n w_n)$$

oraz

$$a \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n) = (a \cdot_1 v_1, a \cdot_2 v_2, \dots, a \cdot_n v_n).$$

Twierdzenie 5.2. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F . Wówczas:

- (1) $\forall v, w, u \in V [v + w = v + u \Rightarrow w = u]$,
- (2) $\forall v, w \in V [v = -w \Rightarrow v + w = 0]$,
- (3) $\forall v, w \in V [v - w = v + (-w)]$,
- (4) $\forall a \in F \forall v \in V [av = \theta \Rightarrow a = 0 \vee v = 0]$,
- (5) $\forall a \in F [a \cdot \theta = \theta]$,
- (6) $\forall v \in V [0 \cdot v = \theta]$,
- (7) $\forall v \in V [-v = (-1)v]$,
- (8) $\forall v, w, u \in V [v - (w + u) = (v - w) - u]$,
- (9) $\forall v, w, u \in V [v - (w - u) = (v - w) + u]$,
- (10) $\forall v, w \in V [-(v + w) = (-v) + (-w)]$,
- (11) $\forall v, w \in V [-(v - w) = (-v) + w]$,
- (12) $\forall v, w \in V \forall a \in F [a(v - w) = av - aw]$,
- (13) $\forall v \in V \forall a, b \in F [(a - b)v = av - bv]$,
- (14) $\forall v \in V \forall a \in F [a(-v) = (-a)v = -av]$,
- (15) $\forall v \in V \forall a \in F [(-a)(-v) = av]$.

Proste dowody powyższych własności pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.

Definicja 5.3. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F . Podzbiór U przestrzeni V nazywamy **podprzestrzenią**, jeżeli:

- (1) $\forall v, w \in U [v + w \in U]$,
- (2) $\forall a \in F \forall v \in U [a \cdot v \in U]$.

Podprzestrzeń oznaczamy symbolem $U < V$.

Przykłady:

(19) Niech F będzie dowolnym ciałem i rozważmy przestrzeń F^2 , a w niej podzbiór

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix} : a \in F \right\}.$$

Wówczas zbiór ten jest podprzestrzenią; istotnie, dla dowolnych dwóch wektorów $\begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ 2b \end{bmatrix}$ i dla dowolnego skalaru $\lambda \in F$ zachodzi:

$$\begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ 2a+2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+b) \\ 2(a+b) \end{bmatrix} \in U$$

oraz

$$\lambda \begin{bmatrix} a \\ 2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda a) \\ 2(\lambda a) \end{bmatrix} \in U.$$

(20) Niech F będzie dowolnym ciałem i rozważmy przestrzeń F^2 , a w niej podzbiór

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} : a \in F \right\}.$$

Wówczas nie jest to podprzestrzeń; istotnie $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in U$ oraz $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in U$, ale

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+1 \end{bmatrix} \notin U.$$

Twierdzenie 5.4. Niech F będzie ciałem, niech $m, n \in \mathbb{N}$ i rozważmy jednorodny układ równań o współczynnikach z ciała F :

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Wówczas zbiór rozwiązań $Sol(\mathcal{U})$ jest podprzestrzenią przestrzeni F^n .

Dowód. Niech $x_1, \dots, x_n$ oraz $y_1, \dots, y_n$ będą rozwiązaniami układu $\mathcal{U}$, niech $a \in F$. Oczywiście rozwią-

zania te możemy interpretować jako wektory $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ przestrzeni F^n . Pokażemy, że

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \in Sol(\mathcal{U}).$$

Istotnie, wystarczy pokazać, że $x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n$ jest rozwiązaniem układu $\mathcal{U}$. Ustalmy $i \in \{1, \dots, m\}$. Wówczas:

$$\begin{aligned} & a_{i1}(x_1 + y_1) + a_{i2}(x_2 + y_2) + \dots + a_{in}(x_n + y_n) \\ &= (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) + (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Pozostaje sprawdzić, że $a \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \text{Sol}(\mathcal{U})$. Faktycznie, dla $i \in \{1, \dots, m\}$:

$$a_{i1}(ax_1) + a_{i2}(ax_2) + \dots + a_{in}(ax_n) = a(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) = a0 = 0.$$

□

Twierdzenie 5.5. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F . Podzbiór $U \subset V$ jest podprzestrzenią przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy $(U, F, +|_{U \times U}, \cdot|_{F \times U})$ jest przestrzenią liniową.

Prosty dowód pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.

Twierdzenie 5.6. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\mathcal{W}$ będzie pewną rodziną podprzestrzeni przestrzeni V . Wówczas $\bigcap \mathcal{W} < V$.

Dowód. Ustalmy $v, w \in \bigcap \mathcal{W}$ oraz $a \in F$. Pokażemy, że $v + w \in \bigcap \mathcal{W}$. Istotnie, jako że $v, w \in \bigcap \mathcal{W}$, więc $v, w \in U$ dla wszystkich $U \in \mathcal{W}$, a stąd $v + w \in U$, dla wszystkich $U \in \mathcal{W}$. Ale to oznacza, że $v + w \in \bigcap \mathcal{W}$.

Analogicznie sprawdzamy, że $av \in \bigcap \mathcal{W}$.

□

Definicja 5.7. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , a $A \subset V$ pewnym zbiorem. Najmniejszą podprzestrzeń przestrzeni V zawierającą zbiór A nazywamy **podprzestrzenią generowaną przez A** i oznaczamy $\text{lin}(A)$. Każdy zbiór A o tej własności, że $\text{lin}(A) = U$ nazywamy **zbiorem generatorów podprzestrzeni U** . Jeśli $A = \{v_1, \dots, v_m\}$, to oznaczamy

$$\text{lin}(v_1, \dots, v_m) = \text{lin}(A).$$

Mówimy, że podprzestrzeń U jest **skończenie generowana**, gdy istnieją takie wektory $v_1, \dots, v_m \in V$, że

$$U = \text{lin}(v_1, \dots, v_m).$$

Twierdzenie 5.8 (o postaci elementów podprzestrzeni generowanej przez zbiór). Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F oraz niech $A \subset V$. Wówczas

$$\text{lin}(A) = \{a_1v_1 + \dots + a_mv_m : m \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_m \in F, v_1, \dots, v_m \in A\}.$$

Dowód. Oznaczmy

$$U = \{a_1v_1 + \dots + a_mv_m : m \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_m \in F, v_1, \dots, v_m \in A\}.$$

Pokażemy, że $U < V$. Istotnie, jeśli $a_1v_1 + \dots + a_mv_m, a'_1v'_1 + \dots + a'_mv'_m \in U$, to wówczas $a_1v_1 + \dots + a_mv_m + a'_1v'_1 + \dots + a'_mv'_m \in U$. Podobnie dla $a \in F$ mamy $a(a_1v_1 + \dots + a_mv_m) = aa_1v_1 + \dots + aa_mv_m \in U$.

Pokażemy, że $U = \text{lin}(A)$. Inkluzja ($\supset$) jest oczywista, pozostaje wykazać ($\subset$). Dowód prowadzimy przez indukcję względem m . Dla $m = 1$ niech $v_1 \in A$. Wówczas a_1v_1 należy do każdej podprzestrzeni zawierającej v_1 , w szczególności do $\text{lin}(A)$. Dla $m > 1$ ustalmy $v_1, \dots, v_m \in A$ oraz $a_1, \dots, a_m \in F$ i założmy, że

$$a_1v_1 + \dots + a_mv_m \in \text{lin}(A).$$

Ustalmy $a_{m+1} \in F$ oraz $v_{m+1} \in A$. Wówczas

$$\underbrace{a_1v_1 + \dots + a_mv_m}_{\in \text{lin}(A)} + a_{m+1} \underbrace{v_{m+1}}_{\in \text{lin}(A)} \cdot \underbrace{1}_{\in \text{lin}(A)}.$$

□

Definicja 5.9. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $v_1, \dots, v_m \in V$, niech $a_1, \dots, a_m \in F$. Wektor

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

nazywamy **kombinacją liniową** wektorów $v_1, \dots, v_m$.

Przykłady:

(21) Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Wektor

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

jest kombinacją liniową wektorów $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Definicja 5.10. Niech $(V, F, +_V, \cdot_V)$ i $(W, F, +_W, \cdot_W)$ będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem F . Funkcję $f : V \rightarrow W$ nazywamy **izomorfizmem** przestrzeni liniowych, jeżeli jest bijekcją i spełnione są warunki:

- (1) $\forall v, w \in V [f(v +_V w) = f(v) +_W f(w)],$
- (2) $\forall a \in F \forall v \in V [f(a \cdot_V v) = a \cdot_W f(v)].$

Jeżeli istnieje izomorfizm $f : V \rightarrow W$, to przestrzenie V i W nazywamy **izomorficznymi**, co oznaczamy przez $V \cong W$.

Przykłady:

(22) Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $n \in \mathbb{N}$. Wówczas przestrzenie F^n oraz F_n są izomorficzne. Istotnie, rozważmy funkcję $f : F^n \rightarrow F_n$ daną wzorem

$$f \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) = [x_1, \dots, x_n].$$

Sprawdzenie, że funkcja ta jest bijekcją pozostawiamy czytelnikowi jako łatwe ćwiczenie. Ustalmy

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in F^n \text{ oraz } a \in F. \text{ Wówczas:}$$

$$\begin{aligned} f \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right) &= f \left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \right) \\ &= [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n] = [x_1, \dots, x_n] + [y_1, \dots, y_n] \\ &= f \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) + f \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

oraz

$$f\left(a \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix}\right) = [ax_1, \dots, ax_n] = a[x_1, \dots, x_n] = a\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right).$$

- (23) Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $m, n \in \mathbb{N}$. Wówczas przestrzenie F_{nm} oraz $M_m^n(F)$ są izomorficzne. Istotnie, podobnie jak wcześniej sprawdzamy, że odwzorowanie $f : F_{nm} \rightarrow M_m^n(F)$ dane wzorem:

$$f([x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn}]) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

jest izomorfizmem przestrzeni liniowych.

- (24) Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $n \in \mathbb{N}$. Wówczas przestrzenie F_{n+1} oraz $F[x]_n$ są izomorficzne. Istotnie, podobnie jak wcześniej sprawdzamy, że odwzorowanie $f : F_{n+1} \rightarrow F[x]_n$ dane wzorem:

$$f([a_0, a_1, \dots, a_n]) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

jest izomorfizmem przestrzeni liniowych.

Twierdzenie 5.11. *Izomorfizm przestrzeni liniowych jest relacją równoważności w klasie wszystkich przestrzeni liniowych.*

Prosty dowód pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.

Przykład:

- (25) Niech F będzie dowolnym ciałem, niech $n, m \in \mathbb{N}$. Wówczas przestrzenie F^{nm} i $M_m^n(F)$ są izomorficzne. Istotnie, poprzednio sprawdziliśmy, że $F^{nm} \cong F_{nm}$ oraz $F_{nm} \cong M_m^n(F)$. Ponieważ relacja $\cong$ jest równoważnością, a więc w szczególności jest przechodnia, również $F^{nm} \cong M_m^n(F)$. Podobnie możemy sprawdzić, że $F^{n+1} \cong F[x]_n$.

5.2. Liniowa niezależność. Warstwy i przestrzenie ilorazowe.

Definicja 5.12. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $A \subset V$. Zbiór wektorów A nazywamy **liniowo niezależnym**, jeżeli

$$\forall m \in \mathbb{N} \forall v_1, \dots, v_m \in A \forall a_1, \dots, a_m \in F [a_1v_1 + \dots + a_mv_m = \theta \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0].$$

Jeżeli dany zbiór wektorów nie jest liniowo niezależny, to mówimy, że jest **liniowo zależny**.

Uwaga 5.13. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $A = \{v_1, \dots, v_m\}$. Wówczas zbiór A jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall a_1, \dots, a_m \in F [a_1v_1 + \dots + a_mv_m = \theta \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0].$$

Przykłady:

(1) Niech F będzie dowolnym ciałem i rozważmy przestrzeń F^3 . Wówczas wektory $\epsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$\epsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\epsilon_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ są liniowo niezależne. Istotnie, ustalmy $a_1, a_2, a_3 \in F$ i załóżmy, że

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Oznacza to, że a_1, a_2, a_3 jest rozwiązaniem układu:

$$\mathcal{U} : \begin{cases} 1a_1 + 0a_2 + 0a_3 = 0 \\ 0a_1 + 1a_2 + 0a_3 = 0 \\ 0a_1 + 0a_2 + 1a_3 = 0 \end{cases}.$$

Macierz współczynników lewych stron równań układu $\mathcal{U}$ jest równa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a jej wyznacznik $\det(A) = 1 \neq 0$, a zatem wobec wzorów Cramera układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

(2) Niech F będzie dowolnym ciałem i rozważmy przestrzeń F^3 . Wówczas wektory $\epsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$\epsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ są liniowo zależne. Istotnie:

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 5.14. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $v_1, \dots, v_m \in V$. Wektory $v_1, \dots, v_m$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wektor $v \in \{v_1, \dots, v_m\}$ będący kombinacją liniową pozostałych.

Dowód. ($\Rightarrow$) : Załóżmy, że $v_1, \dots, v_m$ są liniowo zależne. Wówczas istnieją skalary $a_1, \dots, a_m \in F$ takie, że

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = \theta,$$

z których przynajmniej jeden jest niezerowy. Powiedzmy, że $a_1 \neq 0$. Wobec tego:

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \dots - \frac{a_m}{a_1} v_m.$$

($\Leftarrow$) : Załóżmy, że jeden z wektorów, powiedzmy v_1 , jest kombinacją liniową $v_2, \dots, v_m$:

$$v_1 = a_2 v_2 + \dots + a_m v_m.$$

Wówczas $1 \cdot v_1 - a_2 v_2 - \dots - a_m v_m = \theta$ oraz $1 \neq 0$. □

Twierdzenie 5.15. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $A \subset B \subset V$. Wówczas:

- (1) jeśli A jest liniowo zależny, to B jest liniowo zależny;
- (2) jeśli B jest liniowo niezależny, to A jest liniowo niezależny;
- (3) jeśli A jest liniowo zależny, to istnieją wektory $v_1, \dots, v_m \in A$, które są liniowo zależne.

Definicja 5.16. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $U < V$. **Warstwą** wektora $v \in V$ względem podprzestrzeni U nazywamy zbiór

$$v + U = \{v + w : w \in U\}.$$

Zbiór wszystkich warstw oznaczamy przez V/U .

Przykład:

- (3) Rozważmy ciało $\mathbb{Z}_3$ i przestrzeń $\mathbb{Z}_3^2$. Sprawdzamy, że

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{Z}_3^2$, zaś sama przestrzeń $\mathbb{Z}_3^2$ składa się z następujących wektorów:

$$\mathbb{Z}_3^2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Warstwy podprzestrzeni U to:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + U &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = U \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + U = U$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + U = U$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = W_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = W_1$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + U = W_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = W_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + U = W_2$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + U = W_2.$$

Zatem $\mathbb{Z}_3^2/U = \{U, W_1, W_2\}$.

Twierdzenie 5.17. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $U < V$. W zbiorze warstw V/U definiujemy dodawanie:

$$(v + U) + (w + U) = (v + w) + U$$

oraz mnożenie przez skalar $a \in F$:

$$a \cdot (v + U) = (a \cdot v) + U.$$

Wówczas $(V/U, F, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową. Nazywamy ją **przestrzenią ilorazową**.

Prosty dowód pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.

Przykład:

- (4) Odwołując się do poprzedniego przykładu, rozważmy przestrzeń ilorazową $\mathbb{Z}_3^2/U = \{U, W_1, W_2\}$, gdzie

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

oraz

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Sprawdzamy, że, na przykład:

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + U \right) + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + U \right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) + U = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + U = U. \end{aligned}$$

Twierdzenie 5.18. Niech F będzie ciałem, niech $m, n \in \mathbb{N}$ i rozważmy układ równań o współczynnikach z ciała F :

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Niech ponadto $\mathcal{U}_0$ będzie układem jednorodnym powstałym z $\mathcal{U}$ przez zastąpienie prawych stron równań zerami:

$$\mathcal{U}_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Wówczas zbiór rozwiązań $Sol(\mathcal{U})$ jest warstwą podprzestrzeni rozwiązań układu jednorodnego $U = Sol(\mathcal{U}_0)$ w przestrzeni F^n .

Dowód. Niech $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ będą rozwiązaniami układu $\mathcal{U}$. Pokażemy, że

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{bmatrix} \in U = Sol(\mathcal{U}_0).$$

Ustalmy $i \in \{1, \dots, m\}$. Wówczas:

$$\begin{aligned} & a_{i1}(x_1 - y_1) + a_{i2}(x_2 - y_2) + \dots + a_{in}(x_n - y_n) \\ &= (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) - (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n) \\ &= b_i - b_i = 0. \end{aligned}$$

Oznacza to, że $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + U$. Wobec dowolności $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, oznacza to, że $Sol(\mathcal{U}) \subset \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + U$.

Dla dowodu drugiej inkluzji ustalmy $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + z_1 \\ \vdots \\ y_n + z_n \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + U$, gdzie $\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in U$.

Ustalmy $i \in \{1, \dots, m\}$. Wówczas:

$$\begin{aligned} & a_{i1}(y_1 + z_1) + a_{i2}(y_2 + z_2) + \dots + a_{in}(y_n + z_n) \\ &= (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n) + (a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \dots + a_{in}z_n) \\ &= b_i + 0 = b_i, \end{aligned}$$

a zatem $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in Sol(\mathcal{U})$ i tym samym $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + U \subset Sol(\mathcal{U})$. □

6. WYKŁAD 6.

6.1. Sumy i sumy proste podprzestrzeni.

Uwaga 6.1. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $U_1, \dots, U_n < V$.

(1) Zbiór

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

jest podprzestrzenią przestrzeni V .

(2) Zbiór

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n = \{u_1 + u_2 + \dots + u_n : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \dots, u_n \in U_n\}$$

jest podprzestrzenią przestrzeni V .

Dowód. Pokażemy część (1) uwagi, dowód części (2) przebiega analogicznie. Ustalmy $u_1 + u_2, u'_1 + u'_2 \in U_1 + U_2$, gdzie $u_1, u'_1 \in U_1$ oraz $u_2, u'_2 \in U_2$. Wówczas:

$$(u_1 + u_2) + (u'_1 + u'_2) = \underbrace{(u_1 + u'_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(u_2 + u'_2)}_{\in U_2} \in U_1 + U_2.$$

Ponadto dla $a \in F$:

$$a(u_1 + u_2) = \underbrace{(au_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(au_2)}_{\in U_2} \in U_1 + U_2$$

□

Definicja 6.2. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $U_1, \dots, U_n < V$. Podprzestrzeń $U_1 + U_2$ nazywamy **sumą podprzestrzeni** U_1 i U_2 , podprzestrzeń $U_1 + \dots + U_n$ nazywamy **sumą podprzestrzeni** $U_1, \dots, U_n$.

Przykład:

(5) Rozważmy przestrzeń liniową V i jej podprzestrzenie $U = \text{lin}(u_1, \dots, u_n)$ oraz $W = \text{lin}(w_1, \dots, w_m)$. Wówczas:

$$\begin{aligned} v \in U + W &\Leftrightarrow v = u + w \text{ oraz } u \in U, w \in W \\ &\Leftrightarrow v = u + w \text{ oraz } u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n, w = b_1 w_1 + \dots + b_m w_m, \\ &\quad \text{dla pewnych } a_1, \dots, a_n \in F, b_1, \dots, b_m \in F \\ &\Leftrightarrow v = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n + b_1 w_1 + \dots + b_m w_m, \\ &\quad \text{dla pewnych } a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in F \\ &\Leftrightarrow v \in \text{lin}(u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m). \end{aligned}$$

A zatem $\text{lin}(u_1, \dots, u_n) + \text{lin}(w_1, \dots, w_m) = \text{lin}(u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m)$.

Uwaga 6.3. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $U_1, \dots, U_n < V$.

(1) Następujące dwa warunki są równoważne:

(a) $U_1 \cap U_2 = \{\theta\}$,

(b) jeśli $u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2$, gdzie $u_1, u'_1 \in U_1$, $u_2, u'_2 \in U_2$, to $u_1 = u'_1$ oraz $u_2 = u'_2$.

(2) Następujące dwa warunki są równoważne:

(a) $U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_n) = \{\theta\}$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$,

(b) jeśli $u_1 + u_2 + \dots + u_n = u'_1 + u'_2 + \dots + u'_n$, gdzie $u_i, u'_i \in U_i$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$, to $u_i = u'_i$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dowód. Pokażemy część (1) uwagi, dowód części (2) przebiega analogicznie. Załóżmy, że $U_1 \cap U_2 = \{\theta\}$ i niech $u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2$, dla pewnych $u_1, u'_1 \in U_1$, $u_2, u'_2 \in U_2$. Wówczas $U_1 \ni u_1 - u'_1 = u'_2 - u_2 \in U_2$ i skoro $U_1 \cap U_2 = \{\theta\}$, więc $u_1 - u'_1 = \theta$ oraz $u'_2 - u_2 = \theta$, a stąd $u_1 = u'_1$ oraz $u_2 = u'_2$.

Na odwrót, załóżmy, że jeśli $u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2$, gdzie $u_1, u'_1 \in U_1$, $u_2, u'_2 \in U_2$, to $u_1 = u'_1$ oraz $u_2 = u'_2$. Ustalmy $u \in U_1 \cap U_2$. Wówczas:

$$u = \underbrace{u}_{\in U_1} + \underbrace{\theta}_{\in U_2} = \underbrace{\theta}_{\in U_1} + \underbrace{u}_{\in U_2},$$

a zatem $u = \theta$. □

Definicja 6.4. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $U_1, \dots, U_n < V$. Jeżeli $V = U_1 + U_2$ oraz spełniony jest jeden z dwóch równoważnych warunków Uwagi 6.3 (1), to mówimy, że V jest **sumą prostą** podprzestrzeni U_1 i U_2 , co oznaczamy przez $V = U_1 \oplus U_2$. Podprzestrzeń U_2 nazywamy wtedy **dopełnieniem liniowym** podprzestrzeni U_1 .

Jeżeli $V = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ oraz spełniony jest jeden z dwóch równoważnych warunków Uwagi 6.3 (2), to mówimy, że V jest **sumą prostą** podprzestrzeni $U_1, U_2, \dots, U_n$, co oznaczamy przez $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$.

Uwaga 6.5. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $U_1, \dots, U_n < V$ i niech $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$. Wówczas $V \cong U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$.

Dowód. Zdefiniujmy odwzorowanie $f : V \rightarrow U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ wzorem

$$f(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Sprawdzenie, że jest to dobrze określony izomorfizm pozostawiamy czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie. □