3.2. **Algebra macierzy.**

Definicja 3.11. Macierzą *nad ciałem F nazywamy prostokątną tablicę elementów ciała F.*

Zbiór macierzy o wymiarach $m \times n$ oznaczamy $M_m^n(F)$.

Napis $A = [a_{ij}]$ oznacza, że macierz A składa się z takich elementów, że w $i-$tym wierszu i $j-$tej kolumnie znajduje się a_{ij}.

Macierze A i B są **równe,** *gdy $A, B \in M_m^n(F)$ i jeśli $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, to $a_{ij} = b_{ij}$, dla $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.*

Sumę *macierzy $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$, $A, B \in M_m^n(F)$ definiujemy jako macierz $C = [c_{ij}] \in M_m^n(F)$, gdzie $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.*

Iloczyn *macierzy $A = [a_{ij}]$, $A \in M_m^n(F)$, przez* **skalar** *$\lambda \in F$ definiujemy jako macierz $C = [c_{ij}] \in M_m^n(F)$, gdzie $c_{ij} = \lambda \times a_{ij}$.*

Macierz zerową *Θ definiujemy jako $\Theta = [0]$.*

Uwaga 3.12. *W szczególności zauważmy, że dodawanie jest działaniem wewnętrznym w zbiorze macierzy, a mnożenie przez skalar jest działaniem zewnętrznym.*

Przykłady:

(1) Wprost z definicji dodawania macierzy nad ciałem $\mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

(2) Dodawanie $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$ nie jest wykonalne.

(3) Wprost z definicji mnożenia macierzy nad ciałem $\mathbb{R}$ przez skalar z ciała $\mathbb{R}$:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 3.13. *Niech F będzie ciałem, niech $A, B, C \in M_m^n(F)$, niech $\lambda, \mu \in F$. Wówczas:*

(1) $(A + B) + C = A + (B + C)$,
(2) $A + B = B + A$,
(3) $\Theta + A = A$,
(4) $A + (-A) = \Theta$,
(5) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,
(6) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,
(7) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,
(8) $1 \cdot A = A$, $0 \cdot A = \Theta$,
(9) *jeśli* $\lambda A = \Theta$, *to* $\lambda = 0$ *lub* $A = \Theta$.

Prosty dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Uwaga 3.14. *W szczególności zauważamy, że* $(M_m^n(F), +)$ *jest grupą przemienną, w której elementem neutralnym jest* Θ*, a element przeciwny do* A *to* $-A$*.*

4. Wykład 4.

4.1. Mnożenie macierzy.

Definicja 4.1. Iloczynem macierzy *$A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{jk}]$, gdzie $A \in M_m^n(F)$, $B \in M_p^m(F)$, nazywamy macierz $C = [c_{ik}]$, $C \in M_p^n(F)$, daną wzorem*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Oznaczamy $C = A \cdot B$.

Przykłady:

(4) Wprost z definicji mnożenia macierzy nad ciałem $\mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}.$$

(5) Mnożenie $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$ nie jest wykonalne.

(6) Mnożenie nie jest też przemienne:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

ale

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}.$$

(7) W algebrze macierzy z działaniem mnożenia istnieją dzielniki zera:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 4.2. (1) *$(AB)C = A(BC)$, dla $A \in M_n^m(F)$, $B \in M_p^n(F)$, $C \in M_q^p(F)$.*
(2) *$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, dla $A \in M_n^m(F)$, $B \in M_p^n(F)$, $\lambda \in F$.*
(3) *$(A + B)C = AC + BC$, dla $A, B \in M_n^m(F)$, $C \in M_p^n(F)$.*
(4) *$D(A + B) = DA + DB$, dla dla $A, B \in M_n^m(F)$, $D \in M_m^p(F)$.*

Prosty dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Definicja 4.3. *Macierz $I_n = [\delta_{ij}] \in M_n^n(F)$, gdzie*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = j \\ 0, & \text{gdy } i \neq j \end{cases}$$

nazywamy **macierzą identycznościową**. *Macierz $A \in M_n^n(F)$ nazywamy* **odwracalną** *(lub* **nieosobliwą***), jeżeli istnieje macierz $B \in M_n^n(F)$ taka, że*

$$AB = BA = I_n.$$

Macierz B nazywamy wówczas **macierzą odwrotną** *do A i oznaczamy A^{-1}.*

Wniosek 4.4. *W szczególności zauważamy, że $(M_n^n(F), +, \cdot)$ jest pierścieniem z jedynką, który nie musi być przemienny.*

Wniosek 4.5. (1) *Macierz odwrotna jest wyznaczona jednoznacznie.*

(2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, *dla* $A, B \in M_n^n(F)$.

(3) $AI_n = I_nA = A$, *dla* $A \in M_n^n(F)$.

(4) $(A^{-1})^{-1} = A$.

Twierdzenie 4.6. *Niech* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_n^n(F)$ *i niech* $\Delta = ad - bc \neq 0$. *Wówczas* A *jest nieosobliwa oraz*

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Dowód. Bezpośrednio sprawdzamy, że

$$\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Definicja 4.7. Macierzami elementarnymi *nazywamy macierze:*

(1) $E_{ij} \in M_n^n(F)$, *powstałe z* I_n *przez zamianę miejscami* $i-$*tego i* $j-$*tego wiersza;*

(2) $E_i(\lambda) \in M_n^n(F)$, *powstałe z* I_n *przez pomnożenie* $i-$*tego wiersza przez* $\lambda \in F$;

(3) $E_{ij}(\lambda) \in M_n^n(F)$, *powstałe z* I_n *przez dodanie do* $i-$*tego wiersza* $j-$*tego wiersza pomnożonego przez* $\lambda \in F$.

Operacjami elementarnymi na wierszach *macierzy* $A \in M_n^n(F)$ *nazywamy operacje polegające na:*

(1) *zamianie miejscami* $i-$*tego i* $j-$*tego wiersza;*

(2) *pomnożeniu* $i-$*tego wiersza przez* $\lambda \in F$;

(3) *dodaniu do* $i-$*tego wiersza* $j-$*tego wiersza pomnożonego przez* $\lambda \in F$.

Przykład:

(8) Sprawdzamy, że na przykład:

$$E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, E_2(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{23}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Możemy też powiedzieć, że każda z powyższych macierzy powstała z I_3 przez zastosowanie odpowiedniej operacji elementarnej na wierszach.

Twierdzenie 4.8. *Macierz* $E \cdot A$, *gdzie* $A \in M_n^n(F)$, $E \in \{E_{ij}, E_i(\lambda), E_{ij}(\lambda)\} \subset M_n^n(F)$, *powstaje z macierzy* A *przez wykonanie odpowiedniej operacji elementarnej na wierszach.*

Dowód. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$. Pokażemy, dla przykładu, że macierz $E_{ij} \cdot A$ powstaje z A przez zamienienie miejscami $i-$tego i $j-$tego wiersza. Istotnie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

$\square$

Przykład:

(9) Sprawdzamy, na przykład, iż:

$$E_{23} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

Wniosek 4.9. *Macierze elementarne są nieosobliwe oraz*

(1) $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$,
(2) $E_i^{-1}(\lambda) = E_i(\frac{1}{\lambda})$,
(3) $E_{ij}^{-1}(\lambda) = E_{ij}(-\lambda)$.

Dowód. Wystarczy w poprzednim twierdzeniu w roli A wziąć E_{ij}, $E_i(\lambda)$ i $E_{ij}(\lambda)$, odpowiednio. $\square$

Definicja 4.10. *Macierze A i B, $A, B \in M_n^n(F)$, są* **wierszowo równoważne,** *jeśli B można otrzymać z A przez ciąg operacji elementarnych na wierszach.*

Uwaga 4.11. *Macierze A i B, $A, B \in M_n^n(F)$, są wierszowo równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją macierze elementarne $E_1, \ldots, E_r$ takie, że*

$$B = E_r \cdot E_{r-1} \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A.$$

Twierdzenie 4.12. *Niech A będzie macierzą nieosobliwą, $A \in M_n^n(F)$. Wówczas:*

(1) *A jest wierszowo równoważna macierzy I_n,*
(2) *A jest iloczynem macierzy elementarnych*

Dowód. Wobec poprzedniej uwagi wystarczy oczywiście udowodnić tylko pierwszą część twierdzenia. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$ i załóżmy, że istnieje macierz A^{-1}, a zatem taka, że $A^{-1} \cdot A = I_n$. Rozważmy układ równań:

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases}$$

lub, równoważnie, używając notacji macierzowej:

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Oczywiście $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ jest jednym z rozwiązań układu $\mathcal{U}$. Zauważmy, że w istocie jest to jedyne rozwiązanie, jeśli bowiem $x_1, \ldots, x_n \in F$ jest dowolnym rozwiązaniem, to wówczas:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = I_n \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

czyli $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Tym samym układ $\mathcal{U}$ po sprowadzeniu do postaci diagonalnej przybiera formę

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ale sprowadzenie układu do postaci diagonalnej polega na wykonaniu ciągu operacji elementarnych na wierszach macierzy A, udowodniliśmy zatem, że A jest wierszowo równoważna z I_n. □

Twierdzenie 4.13. *Niech $A \in M_n^n(F)$ będzie wierszowo równoważna macierzy I_n (lub, równoważnie, niech będzie iloczynem macierzy elementarnych). Wówczas A jest nieosobliwa i macierz A^{-1} może być wyznaczona przez wykonanie tego samego ciągu operacji elementarnych na wierszach I_n, jakie zostały wykonane na wierszach A aby otrzymać I_n.*

Dowód. Niech $A = E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_r$. Ponieważ każda z macierzy $E_1, E_2, \ldots, E_r$ jest nieosobliwa, więc istnieją macierze $E_1^{-1}, E_2^{-1}, \ldots, E_r^{-1}$ oraz:

$$E_r^{-1} \ldots E_2^{-1} E_1^{-1} E_1 E_2 \ldots E_r = I_n.$$

Jednocześnie równość $E_r^{-1} \ldots E_2^{-1} E_1^{-1} \cdot A = I_n$ oznacza, że macierz I_n otrzymujemy przez kolejne zastosowanie operacji elementarnych odpowiadających macierzom $E_r^{-1}, \ldots, E_2^{-1}, E_1^{-1}$ na macierzy A, zaś równość $A^{-1} = E_r^{-1} \ldots E_2^{-1} E_1^{-1} \cdot I_n$ oznacza, że macierz A^{-1} otrzymujemy przez kolejne zastosowanie operacji elementarnych odpowiadających macierzom $E_r^{-1}, \ldots, E_2^{-1}, E_1^{-1}$ na macierzy I_n. □

Przykład:

(10) Ostatnie twierdzenie dostarcza praktycznej metody wyznaczania macierzy odwrotnych. Przykładowo wyznaczymy macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Praktycznie jest "powiększyć" rozważaną macierz o macierz I_2 i wykonywać wszystkie operacje elementarne równocześnie na obydwu macierzach, sprowadzając macierz A do macierzy I_2 i jednocześnie macierz I_2 do macierzy A^{-1}:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad w_2 - w_1 \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \quad w_2 \cdot (-1)$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad w_1 - 2w_2 \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

a zatem $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Sprawdzamy, że wynik ten zgadza się z Twierdzeniem 4.6.

Okazuje się, że opisany powyżej algorytm można istotnie usprawnić. W tym celu zauważmy najpierw, że symetrycznie do operacji elementarnych na wierszach możemy wprowadzić operacje elementarne na kolumnach i udowodnić rezultaty analogiczne to Twierdzeń 4.8 – 4.13:

Definicja 4.14. Operacjami elementarnymi na kolumnach *macierzy $A \in M_n^n(F)$ nazywamy operacje polegające na:*

(1) *zamianie miejscami $i-$tej i $j-$tej kolumny;*
(2) *pomnożeniu $i-$tej kolumny przez $\lambda \in F$;*
(3) *dodaniu do $i-$tej kolumny $j-$tej kolumny pomnożonej przez $\lambda \in F$.*

Twierdzenie 4.15. *Macierz $A \cdot E$, gdzie $A \in M_n^n(F)$, $E \in \{E_{ij}, E_i(\lambda), E_{ij}(\lambda)\} \subset M_n^n(F)$, powstaje z macierzy A przez wykonanie odpowiedniej operacji elementarnej na kolumnach.*

Dowód jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 4.8 i pozostawiamy go jako ćwiczenie.

Definicja 4.16. *Macierze A i B, $A, B \in M_n^n(F)$, są* **kolumnowo równoważne,** *jeśli B można otrzymać z A przez ciąg operacji elementarnych na kolumnach.*

Uwaga 4.17. *Macierze A i B, $A, B \in M_n^n(F)$, są kolumnowo równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją macierze elementarne $E_1, \ldots, E_r$ takie, że*

$$B = A \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_{r-1} \cdot E_r.$$

Twierdzenie 4.18. *Niech A będzie macierzą nieosobliwą, $A \in M_n^n(F)$. Wówczas A jest kolumnowo równoważna macierzy I_n.*

Dowód jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 4.12 z kilkoma drobnymi modyfikacjami: dla macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$ rozważamy układ równań:

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases}$$

a więc taki, którego macierz powstaje z macierzy A przez zamienienie rolami wierszy i kolumn. Równoważnie układ ten możemy zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

i, jak wcześniej, sprawdzamy, że $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ jest jego jedynym rozwiązaniem, co oznacza, że po sprowadzeniu układu do postaci diagonalnej macierz układu przybiera formę macierzy identycznościowej powiększonej o kolumnę zer. Z kolei sprowadzenie układu do postaci diagonalnej polega na wykonaniu ciągu operacji elementarnych na kolumnach macierzy A. Uzupełnienie szczegółów dowodu pozostawiamy czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Twierdzenie 4.19. *Niech $A \in M_n^n(F)$ będzie kolumnowo równoważna macierzy I_n. Wówczas A jest nieosobliwa i macierz A^{-1} może być wyznaczona przez wykonanie tego samego ciągu operacji elementarnych na kolumnach I_n, jakie zostały wykonane na kolumnach A aby otrzymać I_n.*

Dowód jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 4.13 i pozostawiamy go jako ćwiczenie.

Przykład:

(11) Jak w poprzednim przykładzie, wyznaczymy nową metodą macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Tym razem "powiększymy" rozważaną macierz o macierz I_2 i będziemy wykonywać wszystkie operacje elementarne na kolumnach obydwu macierzy:

$$\begin{array}{cccc} \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] & \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ \hline 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{array}\right] & \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ \hline -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{array}\right] & \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{array}\right] \\ k_2 - 2k_1 & k_1 + k_2 & (-1) \cdot k_2 & \end{array}$$

a zatem $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Wzmiankowane usprawnienie algorytmu znajdowania macierzy odwrotnej polega na połączeniu ze sobą rezultatów Twierdzeń 4.13 i 4.19:

Definicja 4.20. *Macierze A i B, $A, B \in M_n^n(F)$, są* **elementarnie równoważne,** *jeśli B można otrzymać z A przez ciąg operacji elementarnych na kolumnach lub wierszach.*

Twierdzenie 4.21. *Niech $A \in M_n^n(F)$ będzie elementarnie równoważna macierzy I_n. Wówczas A jest nieosobliwa i macierz A^{-1} może być wyznaczona jako iloczyn macierzy K i W, gdzie macierz K powstaje przez wykonanie tego samego ciągu operacji elementarnych na kolumnach I_n, jakie zostały wykonane na kolumnach A aby otrzymać I_n, a macierz W przez wykonanie tego samego ciągu operacji elementarnych na wierszach I_n, jakie zostały wykonane na wierszach A.*

Dowód. Sprawdzenie, że macierz elementarnie równoważna macierzy I_n jest nieosobliwa pozostawiamy jako ćwiczenie. Dla dowodu pozostałej części twierdzenia powiedzmy, że macierz A daje się przekształcić do macierzy I_n przez wykonanie ciągu operacji elementarnych na wierszach, odpowiadających mnożeniu przez macierze elementarne $E_1, \dots, E_r$ oraz operacji elementarnych na kolumnach odpowiadających mnożeniu przez $\widetilde{E_1}, \dots, \widetilde{E_s}$:

$$E_r \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A \cdot \widetilde{E_1} \cdot \ldots \cdot \widetilde{E_s} = I_n.$$

Mnożąc z prawej strony przez, kolejno, $\widetilde{E_s}^{-1}, \dots, \widetilde{E_1}^{-1}$ otrzymujemy:

$$E_r \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = \widetilde{E_s}^{-1} \cdot \ldots \cdot \widetilde{E_1}^{-1},$$

a następnie mnożąc z lewej strony przez, kolejno, $\widetilde{E_s}, \dots, \widetilde{E_1}$ dostajemy:

$$\widetilde{E_1} \cdot \ldots \cdot \widetilde{E_s} \cdot E_r \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = I_n.$$

Tym samym $A^{-1} = \widetilde{E_1} \cdot \ldots \cdot \widetilde{E_s} \cdot E_r \cdot \ldots \cdot E_1 = K \cdot W$, gdzie $K = I_n \cdot \widetilde{E_1} \cdot \ldots \cdot \widetilde{E_s}$ jest macierzą powstałą przez kolejne zastosowanie operacji $\widetilde{E_1}, \dots, \widetilde{E_s}$ do kolumn macierzy I_n, a $W = E_r \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot I_n$ jest macierzą powstałą przez kolejne zastosowanie operacji $E_1, \dots, E_r$ do wierszy macierzy I_n. $\square$

Przykład:

(11) Wyznaczymy nową metodą macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Wygodnie jest osobno zapisywać operacje wykonywane na kolumnach, a osobno operacje wykonywane na wierszach:

$$\underset{k_2 - 2k_1}{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \end{array}\right]} \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -2 & & \\ 0 & 1 & & \end{array}\right] \quad w_2 - w_1 \quad \underset{(-1) \cdot k_2}{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & -2 & & \\ 0 & 1 & & \end{array}\right]} \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & & \\ 0 & -1 & & \end{array}\right]$$

Tym samym $K = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ i ostatecznie:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4.2. **Wyznaczniki.**

Definicja 4.22. *Niech $A \in M_n^n(F)$ i niech A_{ij} oznacza macierz powstałą z A przez skreślenie $i-$tego wiersza i $j-$tej kolumny.* **Wyznacznik** *macierz A definiujemy indukcyjnie w oparciu o* **rozwinięcie Laplace'a** *wzdłuż pierwszego wiersza macierzy A:*

- $\det([a_{11}]) = a_{11}$;
- $\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \ldots + (-1)^{1+n}\det(A_{1n})$.

Zamiast $\det(A)$ *piszemy też* $|A|$. *Pojawiające się w definicji wyznaczniki* $\det(A_{ij})$ *nazywamy* **minorami** *macierzy A.*

Przykład:

(1) Niech $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Wówczas:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

(2) Niech $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Wówczas:

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Wzór ten stosunkowo łatwo jest zapamiętać stosując **schemat Sarrusa:** powiększamy macierz A jeszcze raz przepisując jej dwie pierwsze kolumny:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},$$

a następnie dodajemy do siebie iloczyny wszystkich trójek czynników leżących na przekątnych biegnących z lewego górnego do prawego dolnego rogu oraz odejmujemy iloczyny trójek z przekątnych biegnących od prawego górnego rogu do lewego dolnego:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

i w rezultacie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Widzimy, że obliczanie wyznaczników wprost z definicji jest mało ekonomiczne z obliczeniowego punktu widzenia: obliczenie wyznacznika macierzy stopnia 3 wymaga obliczenia 3 wyznaczników macierzy stopnia 2, obliczenie macierzy stopnia 4 wymaga obliczenia 4 wyznaczników macierzy stopnia 3, a zatem 12 wyznaczników macierzy stopnia 2 itd. W praktyce wyznaczniki obliczamy stosując odpowiednie operacje elementarne na wierszach i kolumnach macierzy.

Twierdzenie 4.23 (o wyznaczniku macierzy trójkątnej)**.** *Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$ będzie macierzą* **trójkątną,** *a zatem taką, że $a_{ij} = 0$, gdy $i < j$. Wówczas*

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Dowód. Dowód prowadzimy przez indukcję względem n. Dla $n = 1$ teza jest oczywista, załóżmy więc, że $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$ jest macierzą trójkątną i że wyznacznik każdej macierzy trójkątnej stopnia $n - 1 \geq 1$ równy jest iloczynowi współrzędnych na głównej przekątnej. Wówczas:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} - 0 \cdot \det(A_{12}) + \ldots + (-1)^{n+1} 0 \cdot \det(A_{1n}) \\
&= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}
\end{aligned}$$

wobec założenia indukcyjnego. □

Twierdzenie 4.24 (o wyznaczniku macierzy klatkowej)**.** *Niech* $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$, $B = [b_{ij}] \in M_m^m(F)$, $C = [c_{ij}] \in M_m^n(F)$ *i* $D = [d_{ij}] \in M_n^m(F)$. *Niech ponadto*

$$E = \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline D & B \end{array}\right] = [e_{ij}], \text{ gdzie } e_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{gdy } i \leq n, j \leq n, \\ c_{i,j-n}, & \text{gdy } i \leq n, j > n, \\ d_{i-n,j}, & \text{gdy } i > n, j \leq n, \\ b_{i-n,j-n}, & \text{gdy } i > n, j > n. \end{cases}$$

Wówczas:

(1) $\left|\begin{array}{c|c} A & \Theta \\ \hline D & B \end{array}\right| = \det(A) \cdot \det(B)$,

(2) $\left|\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline D & \Theta \end{array}\right| = (-1)^{mn} \det(C) \cdot \det(D)$.

Dowód. Udowodnimy część (1), dowód części (2) jest analogiczny i pozostawimy go jako ćwiczenie. Dowód prowadzimy przez indukcję względem n. Dla $n = 1$ i dowolnego m:

$$\left|\begin{array}{c|c} A & \Theta \\ \hline D & B \end{array}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d_{11} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,m-1} & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{m,m-1} & b_{mm} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \det(B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Załóżmy, że dowodzony rezultat jest prawdziwy dla dowolnej liczby naturalnej m oraz $n - 1 \geq 1$. Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$, $B = [b_{ij}] \in M_m^m(F)$, $D = [d_{ij}] \in M_n^m(F)$ i niech D_j oznacza macierz powstałą z D przez wykreślenie $j-$tej kolumny. Wówczas:

$$\left|\begin{array}{c|c} A & \Theta \\ \hline D & B \end{array}\right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \left|\begin{array}{c|c} A_{1j} & \Theta \\ \hline D_j & B \end{array}\right|.$$

Ponieważ A_{1j} jest macierzą stopnia $n - 1$, więc wobec założenia indukcyjnego:

$$\left|\begin{array}{c|c} A_{1j} & \Theta \\ \hline D_j & B \end{array}\right| = \det(A_{1j}) \det(B),$$

a stąd:

$$\begin{aligned}
\left|\begin{array}{c|c} A & \Theta \\ \hline D & B \end{array}\right| &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\left|\begin{array}{c|c} A_{1j} & \Theta \\ \hline D_j & B \end{array}\right| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j})\det(B) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j})\right)\cdot\det(B) = \det(A)\cdot\det(B).
\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 4.25 (o wyznaczniku macierzy transponowanej)**.** *Niech $A=[a_{ij}]\in M_n^n(F)$ i niech $A^T=[b_ij]\in M_n^n(F)$ będzie macierzą* **transponowaną** *do A, czyli zdefiniowaną wzorem $b_{ij}=a_{ji}$. Wówczas*

$$\det(A)=\det(A^T).$$

Dowód. Dowód prowadzimy przez indukcję względem n. Dla $n=1$ twierdzenie jest oczywiste, gdyż wówczas $A=A^T$. Dla $n=2$ twierdzenie wynika wprost ze wzrów podanych w Przykładzie (1). Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n-1\geq 2$. Niech $A=[a_{ij}]\in M_n^n(F)$, niech $A_{i,k;j,l}$ oznacza macierz powstałą z A przez wykreślenie wierszy o wskaźnikach i oraz k, a następnie kolumn o wskaźnikach j oraz l. Wówczas:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j}) = \sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j}^T) \\
&= \sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\left(\sum_{i=2}^{n}(-1)^{2+i}a_{i1}\det(A_{1,i;1,j})\right) = \sum_{i,j=2}^{n}(-1)^{i+j+1}a_{1j}a_{i1}\det(A_{1,i;1,j}).
\end{aligned}$$

Podobnie:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+i}a_{i1}\det((A^T)_{1i}) = \sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+i}a_{i1}\det(A_{i1}) \\
&= \sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+i}a_{i1}\left(\sum_{j=2}^{n}(-1)^{2+j}a_{1j}\det(A_{1,i;1,j})\right) = \sum_{i,j=2}^{n}(-1)^{i+j+1}a_{1j}a_{i1}\det(A_{1,i;1,j}).
\end{aligned}$$

Wobec tego:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j}) = \sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j}) + a_{11}\det(A_{11}) \\
&= \sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+i}a_{i1}\det((A^T)_{1i}) + a_{11}\det((A^T)_{11}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}a_{i1}\det((A^T)_{1i}) = \det(A^T).
\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 4.26 (o liniowości wyznacznika)**.** *Niech $A=[a_{ij}]\in M_n^n(F)$. Oznaczmy $\beta_i=\left[\begin{array}{ccc} a_{i1} & \ldots & a_{in}\end{array}\right]$, dla $i\in\{1,\ldots,n\}$, tak aby*

$$A=\left[\begin{array}{c}\beta_1\\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n\end{array}\right].$$

Niech ponadto $\lambda, \mu \in F$ *oraz* $\beta'_i = \left[\begin{array}{ccc} a'_{i1} & \dots & a'_{in} \end{array}\right]$. *Wówczas*

$$\det\left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{i-1} \\ \hline \lambda\beta_i + \mu\beta'_i \\ \hline \beta_{i+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right) = \lambda \det\left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{i-1} \\ \hline \beta_i \\ \hline \beta_{i+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right) + \mu \det\left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{i-1} \\ \hline \beta'_i \\ \hline \beta_{i+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right)$$

Dowód. Dowód prowadzimy przez indukcję względem n. Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wyznaczników macierzy stopnia $n - 1 \geq 1$. Jeżeli $i > 1$, to teza wynika wprost z założenia indukcyjnego i definicji wyznacznika. Załóżmy więc, że $i = 1$. Wówczas:

$$\det\left(\left[\begin{array}{c} \lambda\beta_1 + \mu\beta'_1 \\ \hline \beta_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} (\lambda a_{1j} + \mu a'_{1j}) \det(A_{1j})$$

$$= \lambda \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) + \mu \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a'_{1j} \det(A_{1j}),$$

gdzie $A = \left[\begin{array}{c} \lambda\beta_1 + \mu\beta'_1 \\ \hline \beta_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]$. Ponieważ $A_{1j} = \left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \beta_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]_{1j}$ oraz $A_{1j} = \left[\begin{array}{c} \beta'_1 \\ \hline \beta_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]_{1j}$ więc

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) = \det\left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \beta_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right) \quad \text{oraz} \quad \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a'_{1j} \det(A_{1j}) = \det\left(\left[\begin{array}{c} \beta'_1 \\ \hline \beta_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right)$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Wniosek 4.27. *Niech* $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$. *Oznaczmy:*

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \ \textit{dla } j \in \{1, \dots, n\},$$

tak aby $A = \left[\begin{array}{c|c|c} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{array}\right]$. *Niech ponadto* $\lambda, \mu \in F$ *oraz*

$$\alpha'_j = \begin{bmatrix} a'_{1j} \\ \vdots \\ a'_{nj} \end{bmatrix}.$$

Wówczas:

$$
\begin{aligned}
&\det\left(\left[\ \alpha_1 \mid \ldots \mid \alpha_{j-1} \mid \lambda\alpha_j + \mu\alpha'_j \mid \alpha_{j+1} \mid \ldots \mid \alpha_n\ \right]\right) \\
&\quad = \ \lambda \det\left(\left[\ \alpha_1 \mid \ldots \mid \alpha_{j-1} \mid \alpha_j \mid \alpha_{j+1} \mid \ldots \mid \alpha_n\ \right]\right) + \mu \det\left(\left[\ \alpha_1 \mid \ldots \mid \alpha_{j-1} \mid \alpha'_j \mid \alpha_{j+1} \mid \ldots \mid \alpha_n\ \right]\right).
\end{aligned}
$$

Dowód wynika wprost z Twierdzeń 4.25 i 4.26.

Wniosek 4.28 (o związku wyznacznika z operacjami elementarnymi typu 2)**.** *Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$.*

(1) *Jeżeli w macierzy A pomnożymy $i-$ty wiersz przez $\lambda \in F$, to wyznacznik* $\det(A)$ *również należy pomnożyć przez $\lambda \in F$.*

(2) *Jeżeli w macierzy A pomnożymy $j-$tą kolumnę przez $\lambda \in F$, to wyznacznik* $\det(A)$ *również należy pomnożyć przez $\lambda \in F$.*

Twierdzenie 4.29. *Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$. Oznaczmy $\beta_i = \left[\ a_{i1}\ \ \ldots\ \ a_{in}\ \right]$, dla $i \in \{1, \ldots, n\}$, tak aby*

$$
A = \left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right].
$$

Jeżeli $\beta_i = \beta_k$, dla pewnych $i, k \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq k$, to wówczas $\det(A) = 0$.

Dowód. Możemy bez straty ogólności założyć, że $i < k$. Dowód prowadzimy przez indukcję względem n. Jeżeli $n = 2$, to $i = 1$ oraz $k = 2$ i dowodzony wzór wynika wprost ze wzoru na wyznacznik macierzy stopnia 2. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla macierzy stopnia $n - 1 \geq 2$. Jeżeli $i > 1$ to teza wynika wprost z założenia indukcyjnego i definicji wyznacznika. Załóżmy więc, że $i = 1$. Możemy również założyć, że $k = 2$, jeżeli bowiem $k > 2$, to na mocy udowodnionej już części twierdzenia:

$$
\det\left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \beta_2+\beta_k \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_2+\beta_k \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right) = 0, \det\left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \beta_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_2 \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right) = 0 \text{ oraz } \det\left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \beta_k \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_k \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right) = 0.
$$

Wobec Twierdzenia 4.26:

$$
\det\left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \beta_2+\beta_k \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_2+\beta_k \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right) = \det\left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \beta_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_2 \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right) + \det\left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \beta_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_k \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right) + \det\left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \beta_k \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_2 \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right) + \det\left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \beta_k \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_k \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right),
$$

skąd

$$\det(A) = -\det\left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \beta_k \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_2 \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}\right)$$

i tym samym wystarczy rozważać przypadek $i = 1$ oraz $k = 2$. Oznaczmy przez $A_{1,2;st}$ macierz powstałą z A przez skreślenie dwóch pierwszych wierszy oraz kolumn o wskaźnikach s i t. Wówczas:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j}) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\left[\left(\sum_{s=1}^{j-1}(-1)^{1+s}a_{2s}\det(A_{1,2;s,j})\right)+\left(\sum_{s=j+1}^{n}(-1)^{s}a_{2s}\det(A_{1,2;j,s})\right)\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\left[\left(\sum_{s=1}^{j-1}(-1)^{1+s}a_{1s}\det(A_{1,2;s,j})\right)+\left(\sum_{s=j+1}^{n}(-1)^{s}a_{1s}\det(A_{1,2;j,s})\right)\right] \\
&= a_{11}a_{12}\det(A_{1,2;1,2}) - a_{11}a_{13}\det(A_{1,2;1,3}) + a_{11}a_{14}\det(A_{1,2;1,4}) + \ldots + (-1)^n a_{11}a_{1n}\det(A_{1,2;1,n}) \\
&- a_{12}a_{11}\det(A_{1,2;1,2}) + a_{12}a_{13}\det(A_{1,2;1,3}) - a_{12}a_{14}\det(A_{1,2;2,4}) + \ldots + (-1)^n a_{12}a_{1n}\det(A_{1,2;2,n}) \\
&+ a_{13}a_{11}\det(A_{1,2;1,3}) - a_{13}a_{12}\det(A_{1,2;1,3}) + a_{13}a_{14}\det(A_{1,2;3,4}) + \ldots + (-1)^n a_{13}a_{1n}\det(A_{1,2;3,n}) \\
&\vdots \\
&+ (-1)^n a_{1n}a_{11}\det(A_{1,2;1,n}) - (-1)^n a_{1n}a_{12}\det(A_{1,2;2,n}) + \ldots + a_{1n}a_{1,n-1}\det(A_{1,2;n-1,n}) = 0,
\end{aligned}$$

co łatwo zauważyć dodając do siebie kolejne wyrazy pierwszego "wiersza" i pierwszej "kolumny" w powyższej tablicy dodawań, następnie kolejne (poza pierwszymi) wyrazy drugiego "wiersza" i drugiej "kolumny", następnie kolejne (poza pierwszymi i drugimi) wyrazu trzeciego "wiersza" i trzeciej "kolumny" itd. □

Wniosek 4.30. *Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$. Oznaczmy:*

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \ \text{dla } j \in \{1, \ldots, n\},$$

tak aby $A = \left[\ \alpha_1 \mid \ldots \mid \alpha_n\ \right]$. Jeżeli $\alpha_i = \alpha_k$, dla pewnych $i, k \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq k$, to wówczas $\det(A) = 0$.

Dowód wynika wprost z Twierdzeń 4.25 i 4.29.

Wniosek 4.31 (o związku wyznacznika z operacjami elementarnymi typu 1)**.** *Niech* $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$*. Oznaczmy* $\beta_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$*, dla* $i \in \{1, \dots, n\}$*, tak aby* $A = \left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]$*. Wówczas*

$$\det(A) = -\det\left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{i-1} \\ \hline \beta_k \\ \hline \beta_{i+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_i \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right).$$

Dowód. Rozważmy macierz $B = \left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{i-1} \\ \hline \beta_i + \beta_k \\ \hline \beta_{i+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_i + \beta_k \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]$. Wobec Twierdzenia 4.26 $\det(B) = 0$. Ponadto:

$$\det B = \det(A) + \det\left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{i-1} \\ \hline \beta_k \\ \hline \beta_{i+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_i \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right) + \det\left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{i-1} \\ \hline \beta_k \\ \hline \beta_{i+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_k \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right) + \det\left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{i-1} \\ \hline \beta_i \\ \hline \beta_{i+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_i \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right) = \det(A) + \det\left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{i-1} \\ \hline \beta_k \\ \hline \beta_{i+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_i \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right),$$

skąd otrzymujemy tezę. $\square$

Wniosek 4.32 (o związku wyznacznika z operacjami elementarnymi typu 1)**.** *Niech* $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$. *Oznaczmy:*

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \ \textit{dla } j \in \{1, \ldots, n\},$$

tak aby $A = \left[\ \alpha_1 \mid \ldots \mid \alpha_n\ \right]$. *Wówczas*

$$\det(A) = -\det\left(\left[\ \alpha_1 \mid \ldots \mid \alpha_{i-1} \mid \alpha_k \mid \alpha_{i+1} \mid \ldots \mid \alpha_{k-1} \mid \alpha_i \mid \alpha_{k+1} \mid \ldots \mid \alpha_n\ \right]\right).$$

Dowód wynika wprost z Twierdzenia 4.25 i Wniosku 4.31.

Wniosek 4.33 (o związku wyznacznika z operacjami elementarnymi typu 3)**.** *Niech* $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$. *Oznaczmy* $\beta_i = \left[\ a_{i1} \ \ \ldots \ \ a_{in}\ \right]$, *dla* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *tak aby*

$$A = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}.$$

Niech $\lambda \in F$. *Wówczas:*

$$\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_i \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_k + \lambda\beta_i \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}\right).$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że:

$$\det\left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_i \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_k + \lambda\beta_i \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_i \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_k \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}\right) + \lambda\det\left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_i \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_i \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}\right) = \det(A).$$

□

Wniosek 4.34 (o związku wyznacznika z operacjami elementarnymi typu 3)**.** *Niech* $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$. *Oznaczmy:*

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \ \textit{dla } j \in \{1, \ldots, n\},$$

tak aby $A = \left[\ \alpha_1 \mid \ldots \mid \alpha_n\ \right]$. *Wówczas* $\det(A) = -\det\left(\left[\ \alpha_1 \mid \ldots \mid \alpha_i \mid \ldots \mid \alpha_k + \lambda\alpha_i \mid \ldots \mid \alpha_n\ \right]\right)$.

Dowód wynika wprost z Twierdzenia 4.25 i Wniosku 4.33.

Przykłady:

(3) Twierdzenie 4.23 wraz z Wnioskami 4.28, 4.31, 4.32, 4.33 i 4.34 dają praktyczną metodę obliczania wyznaczników: najpierw sprowadzamy daną macierz przez ciąg operacji elementarnych do macierzy trójkątnej, a następnie mnożymy wyrazy na głównej przekątnej. Dla przykładu obliczymy wyznacznik macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Mamy kolejno:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ w_2 - 3w_1 \\ w_3 - 7w_1 \\ w_4 - w_1 \end{array} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & k_2 - k_1 & k_3 - 2k_1 & k_4 - k_1 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} w_2 : (-2) \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= (-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ w_3 + w_2 \\ \\ \end{array} = (-2) \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & & k_3 - k_2 & k_4 + k_2 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ w_3 \downarrow \\ w_4 \uparrow \\ \\ \end{array}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ w_4 + 13w_3 \end{array} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 30 = 60$$

Wniosek 4.35. *Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$. Wówczas* $\det(A) \neq 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest elementarnie równoważna macierzy I_n.*

Dowód wynika wprost z Twierdzenia 4.23 wraz z Wnioskami 4.28, 4.31, 4.32, 4.33 i 4.34.

Podamy teraz trzy ważne rezultaty teoretyczne: uogólnienie drugiej części definicji wyznacznika (twierdzenie Laplace'a), związek z układami równań (twierdzenie Cramera) i związek z mnożeniem macierzy (twierdzenie Cauchy'ego).

Twierdzenie 4.36 (rozwinięcie Laplace'a)**.** *Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$ i niech A_{ij} oznacza macierz powstałą z A przez skreślenie $i-$tego wiersza i $j-$tej kolumny. Wówczas*

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \ \textit{dla dowolnych } i \in \{1, \ldots, n\}, \\ \det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \ \textit{dla dowolnych } j \in \{1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Dowód. Udowodnimy pierwszą część twierdzenia, dowód drugiej części będzie wynikał wprost z Twierdzenia 4.25. Oznaczmy $\beta_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$, tak aby

$$A = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}.$$

Jeśli $i = 1$ to teza twierdzenia wynika wprost z definicji wyznacznika. Załóżmy, że $i \neq 1$. Niech:

$$A' = \begin{bmatrix} \beta_i \\ \hline \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{i-1} \\ \hline \beta_{i+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}.$$

Wówczas $A_{ij} = A'_{1j}$ oraz, stosując kolejno $i-1$ razy Wniosek 4.31, $\det(A') = (-1)^{i-1}\det(A)$. Stąd:

$$\det(A) = (-1)^{i-1}\det(A') = (-1)^{i-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{ij}\det(A'_{1j}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij}).$$

□

Twierdzenie 4.37 (wzory Cramera)**.** *Rozważmy układ równań:*

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$ będzie macierzą współczynników lewych stron równań układu $\mathcal{U}$ i oznaczmy przez A_j macierz powstałą z A przez zastąpienie $j-$tej kolumny kolumną wyrazów wolnych $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.
Wówczas układ $\mathcal{U}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(A) \neq 0$ i wyraża się ono wzorami

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}.$$

Dowód. Wobec Wniosku 4.35 wyznacznik $\det(A) \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest elementarnie równoważna macierzy I_n, a to z kolei ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy układ $\mathcal{U}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Pozostaje udowodnić, że

$$a_{i1}\frac{\det(A_1)}{\det(A)} + a_{i2}\frac{\det(A_2)}{\det(A)} + \ldots + a_{1n}\frac{\det(A_n)}{\det(A)} = b_i,$$

dla $i \in \{1,\dots,n\}$. Wobec wzorów Laplace'a $\det(A_j) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} b_i \det(A_{ij})$, dla $j \in \{1,\dots,n\}$, a wobec tego

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}\det(A_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} b_i \det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^n b_i \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij}\det(A_{ij})\right) = c_i \det(A).$$

□

Twierdzenie 4.38 (Cauchy'ego)**.** *Niech* $A, B \in M_n^n(F)$. *Wówczas* $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Dowód. Niech

$$C = \left[\begin{array}{c|c} A & \Theta \\ \hline -I_n & B \end{array}\right].$$

Wobec twierdzenia o wyznaczniku macierzy klatkowej, $\det(C) = \det(A) \cdot \det(B)$. Niech C' oznacza macierz powstałą przez dodanie do $(n+j)-$tej kolumny macierzy C, dla $j \in \{1,\dots,n\}$, kolumnę pierwszą pomnożoną przez b_{1j}, kolumnę drugą pomnożoną przez b_{2j}, ..., kolumnę $n-$tą pomnożoną przez b_{nj}. Wówczas $\det(C) = \det(C')$ i łatwo spostrzec, że

$$C' = \left[\begin{array}{c|c} A & AB \\ \hline -I_n & \Theta \end{array}\right].$$

Z drugiej strony

$$\det(C') = (-1)^{n^2}\det(AB)\det(-I) = (-1)^{n^2}(-1)^n\det(AB) = \det(AB),$$

gdyż dla dowolnej liczby całkowitej $n^2 + n$ jest liczbą parzystą. □