

Baza i wymiar.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F . Podzbiór $B \subset V$ nazywamy **bazą** przestrzeni V , jeżeli:

1. B jest liniowo niezależny,
2. B jest generujący, tzn. $\text{lin}(B) = V$.

Przykłady:

1. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{Q}^n$, lub $\mathbb{R}^n$, lub $\mathbb{C}^n$, lub $\mathbb{Z}_p^n$, lub $GF(p^m)^n$, lub, najogólniej, F^n , gdzie F jest dowolnym ciałem. Niech

$$\epsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \epsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \epsilon_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wówczas $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ jest bazą. Nazywamy ją często **bazą kanoniczną**.

2. Rozważmy przestrzeń $M_n^m(F)$ i niech

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \leftarrow i$$

$\uparrow$
 j

Wówczas $(\epsilon_{11}, \dots, \epsilon_{1n}, \epsilon_{21}, \dots, \epsilon_{2n}, \dots, \epsilon_{m1}, \dots, \epsilon_{mn})$ jest bazą.

3. Rozważmy przestrzeń $F[x]$. Wówczas $(1, x, x^2, x^3, \dots)$ jest bazą.
4. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{C}$ nad ciałem $\mathbb{R}$. Wówczas $(1, i)$ jest bazą.

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $B \subset V$.
Następujące warunki są równoważne:

1. B jest bazą,
2. B jest maksymalnym liniowo niezależnym podzbiorem V .

Dowód:

(1) $\Rightarrow$ (2) :

Założmy, że B jest bazą.

Przypuśćmy, że istnieje liniowo niezależny podzbiór $B \subsetneq B' \subset V$.

Niech $v \in B' \setminus B$.

Ponieważ $V = \text{lin}(B)$, więc $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m$, dla pewnych $v_1, \dots, v_m \in B$ oraz $a_1, \dots, a_m \in F$.

Wówczas $1 \cdot v - a_1 v_1 - \dots - a_m v_m = \theta$ i $1 \neq 0$, a więc B nie jest liniowo niezależny.

(2) $\Rightarrow$ (1) :

Założmy, że B jest maksymalnym liniowo niezależnym podzbiorem V .

Wystarczy pokazać, że B jest generujący. Ustalmy $v \in V$. Jeśli $v \in B$, to $v \in \text{lin}(B)$.

Jeśli $v \notin B$, to $B \cup \{v\}$ jest liniowo zależny, a więc

$av + a_1v_1 + \dots + a_mv_m = \theta$ dla pewnych $a, a_1, \dots, a_m \in F$ oraz $v_1, \dots, v_m \in B$.

Ponieważ $v_1, \dots, v_m$ są liniowo niezależne, więc $a \neq 0$.

Zatem $v = -\frac{a_1}{a}v_1 - \dots - \frac{a_m}{a}v_m \in \text{lin}(B)$.

Wniosek

Każda przestrzeń liniowa ma bazę.

Dowód.

Jeżeli $V = \{\theta\}$, to zbiór pusty jest bazą.

Jeżeli $V \neq \{\theta\}$, to istnieje $\theta \neq v \in V$ i $A = \{v\}$ jest zbiorem liniowo niezależnym.

W niepustej rodzinie

$$\mathcal{X} = \{B \subset V : A \subset B \text{ i } B \text{ jest liniowo niezależny}\}$$

uporządkowanej przez inkluzję każdy łańcuch ma ograniczenie górne, a więc wobec lematu Kuratowskiego-Zorna istnieje element maksymalny, który wobec poprzedniego twierdzenia jest bazą. $\square$

Przykład:

5. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{Q}$. Z poprzedniego twierdzenia wynika istnieje bazy tej przestrzeni, jakkolwiek wskazanie jej elementów nie jest możliwe. Bazę tę nazywamy **bazą Hamela**.

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $B \subset V$.

Następujące warunki są równoważne:

1. B jest bazą,
2. B jest generujący i dla każdego $v \in V$ istnieje dokładnie jedna kombinacja liniowa taka, że

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m,$$

dla $a_1, \dots, a_m \in F$ i $v_1, \dots, v_m \in B$.

Dowód:

(1) $\Rightarrow$ (2) :

Ustalmy $v \neq 0$ i przypuśćmy, że

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = a'_1 v'_1 + \dots + a'_n v'_n$$

dla $v_1, \dots, v_m, v'_1, \dots, v'_n \in B$ oraz $a_1, \dots, a_m, a'_1, \dots, a'_n \in F$.

Wówczas

$$\theta = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m - a'_1 v'_1 - \dots - a'_n v'_n$$

i ponieważ $v \neq \theta$, nie wszystkie a_i, a'_j są równe 0, skąd $v_1, \dots, v_m, v'_1, \dots, v'_n$ są liniowo zależne.

Jest to możliwe, jeśli $n = m$ oraz $v_i = v'_i$.

(2) $\Rightarrow$ (1) :

Przypuśćmy, że B jest liniowo zależny.

Wówczas

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

dla pewnych $v, v_1, \dots, v_m \in B$ oraz $a_1, \dots, a_m \in F$. Zatem $v = 1 \cdot v$ oraz $v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$ są dwiema kombinacjami liniowymi wektorów z B dającymi v .

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $B \subset V$.
Dla $v \in V$ jednoznacznie wyznaczone skalary $a_1, \dots, a_m \in F$ takie,
że dla pewnych $v_1, \dots, v_m \in B$:

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

nazywamy **współrzednymi** wektora v w bazie B .

Przykłady:

6. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Ponieważ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

więc wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ma w bazie $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ współrzędne $(1, 2, 3)$.

7. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Ponieważ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

więc wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ma w bazie $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$
współrzędne $(2, 1, 0)$.

Lemat

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $v, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n \in V$. Jeżeli $v \in \text{lin}(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n)$ oraz $v \notin \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$, to dla pewnego $i \in \{1, \dots, m\}$:

$$v_i \in \text{lin}(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n).$$

Dowód.

Założmy, że $v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m + b_1 w_1 + \dots + b_n w_n$, dla pewnych $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in F$.

Zauważmy, że istnieje $a_i \neq 0$ dla pewnego $i \in \{1, \dots, m\}$: gdyby $a_1 = \dots = a_m = 0$, to wówczas $v = b_1 w_1 + \dots + b_n w_n \in \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$.

Wobec tego:

$$v_i = -\frac{a_1}{a_i} v_1 - \dots - \frac{a_{i-1}}{a_i} v_{i-1} + \frac{1}{a_i} v - \frac{a_{i+1}}{a_i} v_{i+1} - \dots - \frac{a_m}{a_i} v_m - \frac{b_1}{a_i} w_1 - \dots - \frac{b_n}{a_i} w_n$$



Twierdzenie (Lemat Steinitza¹ o wymianie)

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $v, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n \in V$. Załóżmy, że $V = \text{lin}(v_1, \dots, v_m)$ oraz że $w_1, \dots, w_n$ są liniowo niezależne. Wówczas:

1. $n \leq m$,
2. istnieją $i_1, i_2, \dots, i_{m-n}$ takie, że

$$V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}})$$

.

¹Ernst Steinitz (1871-1928) urodzony w Laurahütte, dziś część Siemianowic Śląskich.

Dowód:

Dowód prowadzimy indukcyjnie względem n .

Dla $n = 0$ nie ma czego dowodzić.

Założmy, że jeśli $w_1, \dots, w_n$ są liniowo niezależne, to $n \leq m$ oraz istnieją $i_1, \dots, i_{m-n}$ takie, że $V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}})$.

Niech $w_1, \dots, w_{n+1}$ będą liniowo niezależne.

Jeśli $n < m$, to $n + 1 \leq m$.

Jeśli $n = m$, to wobec założenia indukcyjnego $V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$ i stąd $w_{n+1} \in \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$, a więc $w_1, \dots, w_n, w_{n+1}$ nie mogą być liniowo niezależne.

Pozostaje wykazać część (2) twierdzenia.

Wobec założenia indukcyjnego:

$$w_{n+1} \in V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}}).$$

Ponadto $w_{n+1} \notin \text{lin}(w_1, \dots, w_n)$. Wobec Lematu ??, po ewentualnej zmianie notacji

$$v_{i_{m-n}} \in \text{lin}(w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n-1}}).$$

Zauważmy, że ponieważ każdy z wektorów

$w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}}$ jest kombinacją liniową wektorów

$w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n-1}}$ oraz ponieważ

$V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n}})$, więc w konsekwencji

$$V = \text{lin}(w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-n-1}}).$$

Wniosek

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F . Jeżeli n -elementowy układ jest bazą przestrzeni V , to każda baza tej przestrzeni składa się z dokładnie n wektorów.

Dowód.

Niech $(w_1, \dots, w_n)$ i $(v_1, \dots, v_m)$ będą bazami. Wówczas układ $(v_1, \dots, v_m)$ jest liniowo niezależny, a $(w_1, \dots, w_n)$ generujący, więc z lematu Steinitza $m \leq n$. Przez symetrię $n \leq m$. □

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F . Liczbę elementów dowolnej skończonej bazy przestrzeni V nazywamy **wymiarem** i oznaczamy $\dim V$. Jeżeli nie istnieje skończona baza danej przestrzeni, przyjmujemy $\dim V = \infty$.

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V = n$. Wówczas jeżeli $U < V$, to $\dim U \leq n$.

Dowód.

Wobec lematu Steinitza każdy liniowo niezależny podzbiór V ma co najwyżej n elementów. Ponadto każdy liniowo niezależny podzbiór U jest liniowo niezależnym podzbiorem V , a więc ma co najwyżej n elementów. W szczególności baza U ma co najwyżej n elementów, a więc $\dim U \leq n$. □

Wniosek

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V = n$. Niech $U < V$. Następujące warunki są równoważne:

1. $U = V$,
2. $\dim U = n$.

Dowód.

(1) $\Rightarrow$ (2) : Jeżeli $U = V$, to oczywiście $\dim U = n$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Załóżmy, że $(v_1, \dots, v_n)$ jest bazą U . Bazę tę można uzupełnić do bazy V . Ale baza V będzie miała n elementów, a zatem $(v_1, \dots, v_n)$ jest bazą V . □

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $v_1, \dots, v_n \in V$, niech $a_1, \dots, a_n \in F$. Równość postaci

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \theta$$

nazywamy **zależnością** między $v_1, \dots, v_n$. Ciągi współczynników $(a_1, \dots, a_n)$ odpowiadających wszystkim zależnościom między $v_1, \dots, v_n$ tworzą podzbiór przestrzeni F^n oznaczany przez $\mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$ i nazywany **zbiorem zależności** między $v_1, \dots, v_n$.

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $v_1, \dots, v_n \in V$. Wówczas zbiór zależności $\mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$ jest podprzestrzenią przestrzeni F^n oraz

$$\dim \mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n) = n - \dim \operatorname{lin}(v_1, \dots, v_n).$$

Dowód:

Sprawdzenie, że $\mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$ jest podprzestrzenią pozostawiamy Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Niech $r = \dim \operatorname{lin}(v_1, \dots, v_n)$.

Wówczas każdy maksymalny liniowo niezależny podzbiór zbioru $\{v_1, \dots, v_n\}$ składa się z r elementów.

Możemy założyć, że $v_1, \dots, v_r$ są liniowo niezależne.

Wówczas

$$v_{r+i} = a_{i1}v_1 + \dots + a_{ir}v_r$$

dla pewnych $a_{i1}, \dots, a_{ir} \in F$, $i \in \{1, \dots, n-r\}$.

Pokażemy, że

$$\begin{aligned} & (a_{11}, \dots, a_{1r}, -1, 0, \dots, 0), \\ & (a_{21}, \dots, a_{2r}, 0, -1, \dots, 0), \\ & \vdots \\ & (a_{n-r,1}, \dots, a_{n-r,r}, 0, 0, \dots, -1) \end{aligned}$$

tworzą bazę przestrzeni $\mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$.

Ponieważ

$$a_{i1}v_1 + \dots + a_{ir}v_r - v_{r+i} = \theta$$

więc $(a_{i1}, \dots, a_{ir}, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$.

Założmy, że

$$\begin{aligned}(0, \dots, 0) &= x_1(a_{11}, \dots, a_{1r}, -1, 0, \dots, 0) \\ &+ x_2(a_{21}, \dots, a_{2r}, 0, -1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ &+ x_{n-r}(a_{n-r,1}, \dots, a_{n-r,r}, 0, 0, \dots, -1).\end{aligned}$$

W szczególności dla współrzędnej $n - r + i$:

$$-x_i = 0,$$

a więc $x_1 = \dots = x_{n-r} = 0$ i wektory są liniowo niezależne.

Ustalmy $(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n)$.

Wówczas

$$\begin{aligned}
 & (a_1, \dots, a_n) + a_1(a_{11}, \dots, a_{1r}, -1, 0, \dots, 0) \\
 & \quad + a_2(a_{21}, \dots, a_{2r}, 0, -1, \dots, 0) \\
 & \quad \vdots \\
 & \quad + a_n(a_{n-r,1}, \dots, a_{n-r,r}, 0, 0, \dots, -1) \\
 & = (a_1 + a_1 a_{11} + \dots + a_n a_{n-r,1}, \dots, (a_r + a_1 a_{1r} + \dots + a_n a_{n-r,r}, 0, \dots) \\
 & \in \mathcal{Z}(v_1, \dots, v_n),
 \end{aligned}$$

a zatem

$$(a_1 + a_1 a_{11} + \dots + a_n a_{n-r,1})v_1 + \dots + (a_r + a_1 a_{1r} + \dots + a_n a_{n-r,r})v_r = \theta.$$

Ponieważ $v_1, \dots, v_r$ są liniowo niezależne, więc

$$a_1 + a_1 a_{11} + \dots + a_n a_{n-r,1} = \dots = a_r + a_1 a_{1r} + \dots + a_n a_{n-r,r} = 0$$

i tym samym

$$\begin{aligned}(a_1, \dots, a_n) = & -a_1(a_{11}, \dots, a_{1r}, -1, 0, \dots, 0) \\ & - a_2(a_{21}, \dots, a_{2r}, 0, -1, \dots, 0) \\ & \vdots \\ & - a_n(a_{n-r,1}, \dots, a_{n-r,r}, 0, 0, \dots, -1).\end{aligned}$$

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $U_1, U_2 \leq V$, $\dim U_1 < \infty$, $\dim U_2 < \infty$. Wówczas $\dim(U_1 \cap U_2) < \infty$, $\dim(U_1 + U_2) < \infty$ oraz

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2.$$

Dowód:

Ponieważ $U_1 \cap U_2 \subset U_1$ oraz $\dim U_1 < \infty$, więc $\dim(U_1 \cap U_2) < \infty$.

Niech $(v_1, \dots, v_k)$ będzie bazą $U_1 \cap U_2$.

Możemy uzupełnić ją do bazy $(v_1, \dots, v_k, \dots, v_n)$ podprzestrzeni U_1 i do bazy $(v_1, \dots, v_k, \dots, w_m)$ podprzestrzeni U_2 .

Oczywiście $\text{lin}(v_1, \dots, v_k, \dots, v_n, \dots, w_m) = U_1 + U_2$.

Pokażemy, że wektory $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n, w_{k+1}, \dots, w_m)$ są liniowo niezależne.

Założmy, że $a_1v_1 + \dots + a_nv_n + b_{k+1}w_{k+1} + \dots + b_mw_m = \theta$ dla pewnych $a_1, \dots, a_n, b_{k+1}, \dots, b_m \in F$.

Wówczas

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n = -b_{k+1}w_{k+1} - \dots - b_mw_m \in U_2,$$

a więc $a_1v_1 + \dots + a_nv_n \in U_1 \cap U_2$.

Tym samym $a_{k+1} = \dots = a_n = 0$, a więc

$a_1v_1 + \dots + a_kv_k + b_{k+1}w_{k+1} + \dots + b_mw_m = \theta$ i skoro $(v_1, \dots, v_k, \dots, w_m)$ są liniowo niezależne, więc również $a_1 = \dots = a_k = b_{k+1} = \dots = b_m = 0$.

Wniosek

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V < \infty$, niech $U_1, U_2 < V$. Wówczas

$$\dim(U_1 \cap U_2) \geq \dim U_1 + \dim U_2 - n$$

gdzie $\dim V = n$.

Dowód.

Wystarczy zauważyć, że $\dim(U_1 + U_2) \leq n$.



Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V < \infty$. **Hiperpłaszczyzną** nazywamy każdą podprzestrzeń przestrzeni V o wymiarze $n - 1$.

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V = n$. Niech $U < V$ i niech $\dim U = k$. Wówczas U jest częścią wspólną $n - k$ hiperpłaszczyzn.

Dowód.

Niech $(v_1, \dots, v_k)$ będzie bazą U .

Możemy uzupełnić ją do bazy $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ przestrzeni V .

Niech $W_i = \text{lin}(v_1, \dots, v_{k+i-1}, v_{k+i+1}, \dots, v_n)$, $i \in \{1, \dots, n-k\}$.

Pokażemy, że $U = W_1 \cap \dots \cap W_{n-k}$.

Oczywiście $U = \text{lin}(v_1, \dots, v_k) \subset W_1 \cap \dots \cap W_{n-k}$.

Ustalmy $v \in W_1 \cap \dots \cap W_{n-k}$.

Niech $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ dla pewnych $a_1, \dots, a_n \in F$.

Ustalmy $i \in \{1, \dots, n-k\}$.

Wówczas $v \in W_i$, a więc $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in W_i$.

Tym samym $a_{k+i} = 0$.



Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V = n$. Niech $W_1, \dots, W_l$ będą hiperpłaszczyznami. Wówczas

$$\dim(W_1 \cap \dots \cap W_l) \geq n - l.$$

Dowód.

Dla $l = 1$ nie ma czego dowodzić.

Założmy, że $l > 1$ i że dla l hiperpłaszczyzn rezultat jest prawdziwy. Niech $W_1, \dots, W_{l+1}$ będą hiperpłaszczyznami.

Wówczas $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_l) \geq n - l$.

Wobec poprzedniego wniosku $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_l \cap W_{l+1}) \geq \dim(W_1 \cap \dots \cap W_l) + n - 1 - n \geq n - l - 1 = n - (l + 1)$. □

Wniosek

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem F , niech $\dim V = n$. Niech $U < V$ i niech $\dim U = k$. Wówczas U jest częścią wspólną $n - k$, ale nie mniejszej liczby hiperpłaszczyzn.

Struktura zbioru rozwiązań
układu równań liniowych.

Definicja:

Niech F będzie ciałem, niech $\mathcal{U}_0$ będzie układem jednorodnym m równań liniowych o n niewiadomych i współczynnikach z ciała F .

Niech U_0 będzie podprzestrzenią F^n rozwiązań układu $\mathcal{U}_0$.

Każdą bazę U_0 będziemy nazywać **układem fundamentalnym** rozwiązań układu $\mathcal{U}_0$, a każde przedstawienie parametryczne U_0 **rozwiązaniem ogólnym układu $\mathcal{U}_0$** .

Niech $\mathcal{U}$ będzie układem m równań liniowych o n niewiadomych i współczynnikach z ciała F .

Niech W będzie warstwą podprzestrzeni przestrzeni F^n wyznaczoną przez rozwiązania układu $\mathcal{U}$.

Każde przedstawienie parametryczne W nazywamy **rozwiązaniem ogólnym układu $\mathcal{U}$** .

Twierdzenie:

Niech F będzie ciałem, niech $U < F^n$ będzie wyznaczona przez równanie $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$, dla pewnych $a_1, \dots, a_n \in F$ nie wszystkich równych zeru.

Wówczas U jest hiperpłaszczyzną.

Dowód.

Założmy, że $a_1 \neq 0$.

Wówczas $\epsilon_1 \notin U$, a więc $\dim U \leq n - 1$.

Ponadto $\epsilon_2 - \frac{a_2}{a_1}\epsilon_1, \epsilon_3 - \frac{a_3}{a_1}\epsilon_1, \dots, \epsilon_n - \frac{a_n}{a_1}\epsilon_1 \in U$ i wszystkie te wektory są liniowo niezależne. □

Wniosek:

Niech F będzie ciałem, niech $U < F^n$ będzie wyznaczona przez układ m równań jednorodnych o n niewiadomych.

Wówczas $\dim U \geq n - m$.

Twierdzenie:

Niech F będzie ciałem, niech $U < F^n$ będzie hiperpłaszczyzną.
Wówczas U jest wyznaczona przez równanie $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$,
dla pewnych $a_1, \dots, a_n \in F$ nie wszystkich równych zeru.

Dowód:

Założmy, że $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ jest bazą podprzestrzeni U .

Niech

$$\alpha_i = [a_{i1}, \dots, a_{in}], \text{ dla } i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Rozważmy układ równań

$$\mathcal{U}_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n-1,1}x_1 + \dots + a_{n-1,n}x_n = 0 \end{cases}$$

i niech U_0 oznacza podprzestrzeń rozwiązań układu $\mathcal{U}_0$.

$\dim U_0 \geq n - (n - 1) = 1$, niech zatem $\theta \neq [b_1, \dots, b_n] \in U_0$.

Podprzestrzeń W wyznaczona przez równanie

$b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 0$ jest hiperpłaszczyzną.

Ponadto, wobec określenia $[b_1, \dots, b_n]$, $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in W$ i tym samym $U = \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \subset W$.

Ponieważ $\dim U = \dim W = n - 1$ oznacza to, że $U = W$.

Wniosek:

Niech F będzie ciałem, niech $U < F^n$ będzie podprzestrzenią k -wymiarową.

Wówczas U jest wyznaczona przez układ złożony z $n - k$, ale nie mniej, jednorodnych równań liniowych.

Twierdzenie:

Niech F będzie ciałem, niech $W_1, \dots, W_k < F^n$ będą hiperpłaszczyznami.

Niech $l_i = 0$ będzie równaniem hiperpłaszczyzny W_i ,
 $l_i \in F_h[x_1, \dots, x_n]$, $i \in \{1, \dots, k\}$.

Wówczas $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) = n - k$ wtedy i tylko wtedy, gdy formy liniowe $l_1, \dots, l_k$ są liniowo niezależne.

Dowód:

Założmy, że formy $l_1, \dots, l_k$ są liniowo zależne.

Jedna z tych form jest kombinacją liniową pozostałych – możemy założyć, że l_k jest kombinacją liniową form $l_1, \dots, l_{k-1}$.

Wówczas układy

$$\begin{cases} l_1 = 0 \\ \vdots \\ l_k = 0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} l_1 = 0 \\ \vdots \\ l_{k-1} = 0 \end{cases}$$

mają identyczne zbiory rozwiązań, a więc

$$W_1 \cap \dots \cap W_k = W_1 \cap \dots \cap W_{k-1}.$$

$\dim(W_1 \cap \dots \cap W_{k-1}) \geq n - k - 1 = n - k + 1 > n - k$, więc

$$\dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) > n - k.$$

Udowodniliśmy zatem, że jeżeli $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) = n - k$, to formy $l_1, \dots, l_k$ są liniowo niezależne.

Założmy, że formy $l_1, \dots, l_k$ są liniowo niezależne.

Układ $(l_1, \dots, l_k)$ uzupełniamy do bazy $(l_1, \dots, l_k, \dots, l_n)$ przestrzeni liniowej $F_h[x_1, \dots, x_n]_1$ form liniowych n zmiennych.

Niech W_i będzie hiperpłaszczyzną wyznaczoną przez równanie $l_i = 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Pokażemy, że $W_1 \cap \dots \cap W_n = \{\theta\}$.

Ponieważ $l_1, \dots, l_n$ generują przestrzeń $F_h[x_1, \dots, x_n]_1$, więc formy $x_1, \dots, x_n$ są kombinacjami liniowymi form $l_1, \dots, l_n$.

Tym samym każdy wektor będący rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} l_1 = 0 \\ \vdots \\ l_n = 0 \end{cases}$$

jest też rozwiązaniem układu $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$, a więc $W_1 \cap \dots \cap W_n \subset \{\theta\}$ i tym samym $W_1 \cap \dots \cap W_n = \{\theta\}$.

W szczególności $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_n) = 0$.

Ponieważ $\dim(W_{k+1} \cap \dots \cap W_n) \geq n - (n - k) = k$, więc:

$$\begin{aligned} 0 &= \dim(W_1 \cap \dots \cap W_n) \geq \dim[(W_1 \cap \dots \cap W_k) \cap (W_{k+1} \cap \dots \cap W_n)] \\ &\geq \dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) + \dim(W_{k+1} \cap \dots \cap W_n) - n \\ &\geq \dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) + k - n, \end{aligned}$$

czyli $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) \leq n - k$ i tym samym
 $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) = n - k$.

Wniosek:

Niech F będzie ciałem, niech $l_1, \dots, l_k \in F_h[x_1, \dots, x_n]_1$, niech $U < F^n$ będzie podprzestrzenią wyznaczoną przez układ równań

$$\mathcal{U}_0 : \begin{cases} l_1 = 0 \\ \vdots \\ l_k = 0. \end{cases}$$

Wówczas $\dim U = n - \dim \operatorname{lin}(l_1, \dots, l_k)$

Dowód.

Niech $\dim \operatorname{lin}(l_1, \dots, l_k) = r$ i niech $l_{i_1}, \dots, l_{i_r}$ będzie maksymalnym liniowo niezależnym podzbiorem $\{l_1, \dots, l_n\}$.

Wówczas U jest wyznaczona przez układ

$$\begin{cases} l_{i_1} = 0 \\ \vdots \\ l_{i_r} = 0. \end{cases}$$

i $\dim U = n - r = n - \dim \operatorname{lin}(l_1, \dots, l_n)$.



Definicja:

Niech F będzie ciałem.

Niech $A = [a_{ij}] \in M_m^n(F)$.

Oznaczmy $\beta_i = [a_{i1} \ \dots \ a_{in}]$, dla $i \in \{1, \dots, m\}$, tak aby

$$A = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}.$$

Oznaczmy ponadto:

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \text{ dla } j \in \{1, \dots, n\},$$

tak aby $A = [\alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_n]$.

Liczbę $\dim \text{lin}(\beta_1, \dots, \beta_m)$ nazywamy **rzędem wierszowym** macierzy A , a liczbę $\dim \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ nazywamy **rzędem kolumnowym** macierzy A .

Twierdzenie:

Niech F będzie ciałem, niech $A = [a_{ij}] \in M_m^n(F)$.

Rząd kolumnowy macierzy A równy jest jej rządowi wierszowemu.

Dowód:

Oznaczmy $\beta_i = [a_{i1} \ \dots \ a_{in}]$, dla $i \in \{1, \dots, m\}$, tak aby

$$A = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

oraz

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \text{ dla } j \in \{1, \dots, n\},$$

tak aby $A = [\alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_n]$.

Podprzestrzeń $\mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ przestrzeni F^n jest identyczna z podprzestrzenią rozwiązań układu

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Zatem:

$$\dim \mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = n - \dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Ponadto:

$$\dim \mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = n - \dim \operatorname{lin}(l_1, \dots, l_m),$$

gdzie $l_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \in F_h[x_1, \dots, x_n]_1$, dla $i \in \{1, \dots, m\}$.

Przekształcenie $\phi : F_h[x_1, \dots, x_n]_1 \rightarrow F^n$ dane wzorem

$$\phi(c_1x_1 + \dots + c_nx_n) = [c_1, \dots, c_n]$$

jest izomorfizmem przestrzeni liniowych, a więc

$$\dim \operatorname{lin}(l_1, \dots, l_m) = \dim \operatorname{lin}(\beta_1, \dots, \beta_m).$$

Reasumując:

$$\begin{aligned}n - \dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \dim \mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\&= n - \dim \operatorname{lin}(l_1, \dots, l_m) \\&= n - \dim \operatorname{lin}(\beta_1, \dots, \beta_m),\end{aligned}$$

a więc $\dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \dim \operatorname{lin}(\beta_1, \dots, \beta_m)$.

Definicja:

Niech F będzie ciałem, niech $A = [a_{ij}] \in M_m^n(F)$.

Wspólną wartość rzędu kolumnowego i rzędu wierszowego macierzy A nazywamy **rzędem** macierzy A i oznaczamy $r(A)$.

Wniosek:

Niech F będzie ciałem, niech $A = [a_{ij}] \in M_m^n(F)$.

Wartość $r(A)$ nie ulegnie zmianie, jeżeli na kolumnach lub wierszach macierzy A wykonamy operacje elementarne typu 1, 2 lub 3.

Przykład:

1. Powyższy wniosek daje praktyczną metodę znajdowania rzędu macierzy: najpierw sprowadzamy przez operacje elementarne daną macierz do postaci trójkątnej, a następnie zliczamy niezerowe wiersze lub kolumny.

Dla przykładu obliczymy rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Mamy kolejno:

$$\begin{aligned}
 &= r \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right) \quad \begin{array}{l} r(A) = r \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \right) \\ w_2 - 3w_1 \\ w_3 - 7w_1 \\ w_4 - w_1 \end{array} \\
 &\quad \begin{array}{l} k_2 - k_1 \quad k_3 - 2k_1 \quad k_4 - k_1 \end{array} \\
 &= r \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right) \quad \begin{array}{l} w_2 : (-2) \\ w_3 + w_2 \end{array}
 \end{aligned}$$

$$= r \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right) \quad \begin{matrix} w_3 \downarrow \\ w_4 \uparrow \end{matrix}$$

$k_3 - k_2 \quad k_4 + k_2$

$$= r \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \end{bmatrix} \right) \quad w_4 + 12w_3$$

$$= r \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \right) = 4,$$

gdyż wektory $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 30 \end{bmatrix}$ są liniowo niezależne.

Wniosek:

Niech F będzie ciałem, niech $A = [a_{ij}] \in M_m^n(F)$. Wówczas $r(A) = r(A^T)$.

Wniosek:

Niech F będzie ciałem, niech

$$\mathcal{U}_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

będzie układem m jednorodnych równań liniowych o współczynnikach z ciała F , niech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

niech $U_0 < F^n$ będzie podprzestrzenią rozwiązań układu $\mathcal{U}_0$.
Wówczas

$$\dim U_0 = n - r(A).$$

Wniosek (twierdzenie Kroneckera-Capelliego):

Niech F będzie ciałem, niech

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{oraz } \mathcal{U}_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

będą układami m równań liniowych o współczynnikach z ciała F i m jednorodnych równań liniowych o współczynnikach z ciała F otrzymanym z równań układu $\mathcal{U}$ przez zastąpienie prawych stron zerami, niech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \quad \text{oraz } A_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

niech $U_0 < F^n$ będzie podprzestrzenią rozwiązań układu $\mathcal{U}_0$.

Wówczas układ $\mathcal{U}$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_0)$.

Ponadto jeśli układ $\mathcal{U}$ ma choć jedno rozwiązanie, to wówczas zbiór wszystkich rozwiązań jest warstwą podprzestrzeni U_0 , przy czym $\dim U_0 = n - r(A)$.

W szczególności układ ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_0) = n$.

Dowód:

Wystarczy udowodnić, że układ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_0)$.

Oznaczmy

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \text{ dla } j \in \{1, \dots, n\}, \text{ oraz } \alpha_j = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

tak, aby $A = [\alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_n \mid \beta]$.

Układ $\mathcal{U}$ możemy zapisać wektorowo jako

$$\mathcal{U}_w : x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n = \beta.$$

Elementy $a_1, \dots, a_n \in F$ są rozwiązaniem układu $\mathcal{U}_w$

$$\Leftrightarrow$$

$$a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n = \beta$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\beta \in \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\dim \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \dim \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta) \text{ (jako że } \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \subset \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$r(A_0) = r(A).$$

Twierdzenie:

Niech F będzie ciałem, niech

$$\mathcal{U} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{oraz } \mathcal{U}_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

niech ponadto

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \quad \text{oraz } A_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Wówczas układ $\mathcal{U}$ jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A_0)$.

Dowód:

Wcześniej zauważyliśmy, że układ sprzeczny nie ma rozwiązań, a zatem, wobec twierdzenia Kroneckera-Capelliego, $r(A) \neq r(A_0)$.

Pozostaje sprawdzić, że jeśli układ jest niesprzeczny, to $r(A) = r(A_0)$.

Założmy, że $r(A) \neq r(A_0)$.

Niech $\beta_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$, dla $i \in \{1, \dots, m\}$, i niech $\beta'_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \end{bmatrix}$, dla $i \in \{1, \dots, m\}$, tak aby

$$A_0 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \text{ oraz } A = \begin{bmatrix} \beta'_1 \\ \vdots \\ \beta'_m \end{bmatrix}.$$

Niech ponadto

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \text{ dla } j \in \{1, \dots, n\}, \text{ oraz } \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

tak, aby $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n & \beta \end{bmatrix}$.

Wówczas:

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{lin}(\beta_1, \dots, \beta_m) &= r(A_0) = \dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ &\leq \dim \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta) \\ &= r(A) = \dim \operatorname{lin}(\beta'_1, \dots, \beta'_m),\end{aligned}$$

a zatem $r(A_0) < r(A)$.

Istnieją zatem liczby naturalne $i_1, \dots, i_s$ takie, że wektory $\beta'_{i_1}, \dots, \beta'_{i_s}$ są liniowo niezależne, a wektory $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_s}$ są liniowo zależne.

Tym samym istnieją $a_1, \dots, a_s \in F$ takie, że

$$a_1\beta'_{i_1} + \dots + a_s\beta'_{i_s} \neq \theta \text{ oraz } a_1\beta_{i_1} + \dots + a_s\beta_{i_s} = \theta.$$

Tym samym $a_1\beta'_{i_1} + \dots + a_s\beta'_{i_s} = [0, 0, \dots, 0, a]$, dla pewnego $a \neq 0$.

Wobec tego mnożąc i_j -te równanie układu $\mathcal{U}$ przez a_j , a następnie dodając stronami tak zmodyfikowane równania, otrzymujemy $0 = a$.