Algebra macierzy.

Definicja:

Macierzą nad ciałem F nazywamy prostokątną tablicę elementów ciała F.
Zbiór macierzy o wymiarach $m \times n$ oznaczamy $M_m^n(F)$.
Napis $A = [a_{ij}]$ oznacza, że macierz A składa się z takich elementów, że w $i-$tym wierszu i $j-$tej kolumnie znajduje się a_{ij}.
Macierze A i B są **równe,** gdy $A, B \in M_m^n(F)$ i jeśli $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, to $a_{ij} = b_{ij}$, dla $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Sumę macierzy $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$, $A, B \in M_m^n(F)$ definiujemy jako macierz $C = [c_{ij}] \in M_m^n(F)$, gdzie $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
Iloczyn macierzy $A = [a_{ij}]$, $A \in M_m^n(F)$, przez **skalar** $\lambda \in F$ definiujemy jako macierz $C = [c_{ij}] \in M_m^n(F)$, gdzie $c_{ij} = \lambda \times a_{ij}$.
Macierz zerową Θ definiujemy jako $\Theta = [0]$.

Uwaga:

W szczególności zauważmy, że dodawanie jest działaniem wewnętrznym w zbiorze macierzy, a mnożenie przez skalar jest działaniem zewnętrznym.

Przykłady:

1. Wprost z definicji dodawania macierzy nad ciałem $\mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

2. Dodawanie $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$ nie jest wykonalne.

3. Wprost z definicji mnożenia macierzy nad ciałem $\mathbb{R}$ przez skalar z ciała $\mathbb{R}$:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie:

Niech F będzie ciałem, niech $A, B, C \in M_m^n(F)$, niech $\lambda, \mu \in F$. Wówczas:

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$,
2. $A+B = B+A$,
3. $\Theta + A = A$,
4. $A+(-A) = \Theta$,
5. $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$,
6. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$,
7. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,
8. $1 \cdot A = A$, $0 \cdot A = \Theta$,
9. jeśli $\lambda A = \Theta$, to $\lambda = 0$ lub $A = \Theta$.

Uwaga:

W szczególności zauważamy, że $(M^n_m(F), +)$ jest grupą przemienną, w której elementem neutralnym jest Θ, a element przeciwny do A to $-A$.

Mnożenie macierzy

Definicja:

Iloczynem macierzy $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{jk}]$, gdzie $A \in M_m^n(F)$, $B \in M_p^m(F)$, nazywamy macierz $C = [c_{ik}]$, $C \in M_p^n(F)$, daną wzorem

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Oznaczamy $C = A \cdot B$.

Przykłady:

4. Wprost z definicji mnożenia macierzy nad ciałem $\mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}.$$

5. Mnożenie $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$ nie jest wykonalne.

6. Mnożenie nie jest też przemienne:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

ale

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}.$$

5. W algebrze macierzy z działaniem mnożenia istnieją dzielniki zera:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie:

1. $(AB)C = A(BC)$, dla $A \in M_n^m(F)$, $B \in M_p^n(F)$, $C \in M_q^p(F)$.
2. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, dla $A \in M_n^m(F)$, $B \in M_p^n(F)$, $\lambda \in F$.
3. $(A + B)C = AC + BC$, dla $A, B \in M_n^m(F)$, $C \in M_p^n(F)$.
4. $D(A + B) = DA + DB$, dla dla $A, B \in M_n^m(F)$, $D \in M_m^p(F)$.

Definicja:

Macierz $I_n = [\delta_{ij}] \in M_n^n(F)$, gdzie

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = j \\ 0, & \text{gdy } i \neq j \end{cases}$$

nazywamy **macierzą identycznościową**.
Macierz $A \in M_n^n(F)$ nazywamy **odwracalną** (lub **nieosobliwą**), jeżeli istnieje macierz $B \in M_n^n(F)$ taka, że

$$AB = BA = I_n.$$

Macierz B nazywamy wówczas **macierzą odwrotną** do A i oznaczamy A^{-1}.

Wniosek:

W szczególności zauważamy, że $(M_n^n(F), +, \cdot)$ jest pierścieniem z jedynką, który nie musi być przemienny.

Wniosek:

1. Macierz odwrotna jest wyznaczona jednoznacznie.
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, dla $A, B \in M_n^n(F)$.
3. $AI_n = I_nA = A$, dla $A \in M_n^n(F)$.
4. $(A^{-1})^{-1} = A$.

Twierdzenie:

Niech $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_n^n(F)$ i niech $\Delta = ad - bc \neq 0$.
Wówczas A jest nieosobliwa oraz

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Dowód:

Bezpośrednio sprawdzamy, że

$$\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definicja:

Macierzami elementarnymi nazywamy macierze:

1. $E_{ij} \in M_n^n(F)$, powstałe z I_n przez zamianę miejscami $i-$tego i $j-$tego wiersza;
2. $E_i(\lambda) \in M_n^n(F)$, powstałe z I_n przez pomnożenie $i-$tego wiersza przez $\lambda \in F$;
3. $E_{ij}(\lambda) \in M_n^n(F)$, powstałe z I_n przez dodanie do $i-$tego wiersza $j-$tego wiersza pomnożonego przez $\lambda \in F$.

Operacjami elementarnymi na macierzy $A \in M_n^n(F)$ nazywamy operacje polegające na:

1. zamianie miejscami $i-$tego i $j-$tego wiersza;
2. pomnożeniu $i-$tego wiersza przez $\lambda \in F$;
3. dodaniu do $i-$tego wiersza $j-$tego wiersza pomnożonego przez $\lambda \in F$.

Przykład:

8. Sprawdzamy, że na przykład:

$$E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, E_2(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_{23}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Możemy też powiedzieć, że każda z powyższych macierzy powstała z I_3 przez zastosowanie odpowiedniej operacji elementarnej.

Twierdzenie:

Macierz $E \cdot A$, gdzie $A \in M_n^n(F)$,
$E \in \{E_{ij}, E_i(\lambda), E_{ij}(\lambda)\} \subset M_n^n(F)$, powstaje z macierzy A przez wykonanie odpowiedniej operacji elementarnej.

Dowód:

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$.
Pokażemy, dla przykładu, że macierz $E_{ij} \cdot A$ powstaje z A przez zamienienie miejscami $i-$tego i $j-$tego wiersza.
Istotnie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Przykład:

9. Sprawdzamy, na przykład, iż:

$$E_{23} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

Wniosek:

Macierze elementarne są nieosobliwe oraz

1. $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$,
2. $E_i^{-1}(\lambda) = E_i(\frac{1}{\lambda})$,
3. $E_{ij}^{-1}(\lambda) = E_{ij}(-\lambda)$.

Dowód:

Wystarczy w poprzednim twierdzeniu w roli A wziąć E_{ij}, $E_i(\lambda)$ i $E_{ij}(\lambda)$, odpowiednio.

Definicja:

Macierze A i B, $A, B \in M_n^n(F)$, są **wierszowo równoważne,** jeśli B można otrzymać z A przez ciąg operacji elementarnych na wierszach.

Uwaga:

Macierze A i B, $A, B \in M_n^n(F)$, są wierszowo równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją macierze elementarne $E_1, \ldots, E_r$ takie, że

$$B = E_r \cdot E_{r-1} \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A.$$

Twierdzenie:

Niech A będzie macierzą nieosobliwą, $A \in M_n^n(F)$. Wówczas:

1. A jest wierszowo równoważna macierzy I_n,
2. A jest iloczynem macierzy elementarnych

Dowód:

Wobec poprzedniej uwagi wystarczy oczywiście udowodnić tylko pierwszą część twierdzenia.
Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$ i załóżmy, że istnieje macierz A^{-1}, a zatem taka, że $A^{-1} \cdot A = I_n$.

Rozważmy układ równań:

$$\mathcal{U}: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases}$$

lub, równoważnie, używając notacji macierzowej:

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Oczywiście $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ jest jednym z rozwiązań układu $\mathcal{U}$.

Zauważmy, że w istocie jest to jedyne rozwiązanie, jeśli bowiem $x_1, \ldots, x_n \in F$ jest dowolnym rozwiązaniem, to wówczas:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = I_n \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

czyli $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.
Tym samym układ $\mathcal{U}$ po sprowadzeniu do postaci diagonalnej przybiera formę

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ale sprowadzenie układu do postaci diagonalnej polega na wykonaniu ciągu operacji elementarnych na wierszach macierzy A, udowodniliśmy zatem, że A jest wierszowo równoważna z I_n.

Twierdzenie:

Niech $A \in M_n^n(F)$ będzie wierszowo równoważna macierzy I_n (lub, równoważnie, niech będzie iloczynem macierzy elementarnych). Wówczas A jest nieosobliwa i macierz A^{-1} może być wyznaczona przez wykonanie tego samego ciągu operacji elementarnych na I_n, jakie zostały wykonane na A aby otrzymać I_n.

Dowód:

Niech $A = E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_r$.
Ponieważ każda z macierzy $E_1, E_2, \ldots, E_r$ jest nieosobliwa, więc istnieją macierze $E_1^{-1}, E_2^{-1}, \ldots, E_r^{-1}$ oraz:

$$E_r^{-1} \ldots E_2^{-1} E_1^{-1} E_1 E_2 \ldots E_r = I_n.$$

Jednocześnie równość $E_r^{-1} \ldots E_2^{-1} E_1^{-1} \cdot A = I_n$ oznacza, że macierz I_n otrzymujemy przez kolejne zastosowanie operacji elementarnych odpowiadających macierzom $E_r^{-1}, \ldots, E_2^{-1}, E_1^{-1}$ na macierzy A, zaś równość $A^{-1} = E_r^{-1} \ldots E_2^{-1} E_1^{-1} \cdot I_n$ oznacza, że macierz A^{-1} otrzymujemy przez kolejne zastosowanie operacji elementarnych odpowiadających macierzom $E_r^{-1}, \ldots, E_2^{-1}, E_1^{-1}$ na macierzy I_n.

Przykład:

10. Ostatnie twierdzenie dostarcza praktycznej metody wyznaczania macierzy odwrotnych.
Przykładowo wyznaczymy macierz odwrotną do macierzy $A = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right]$.
Praktycznie jest "powiększyć" rozważaną macierz o macierz I_2 i wykonywać wszystkie operacje elementarne równocześnie na obydwu macierzach, sprowadzając macierz A do macierzy I_2 i jednocześnie macierz I_2 do macierzy A^{-1}:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad w_2 - w_1 \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \quad w_2 \cdot (-1)$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad w_2 - w_1 \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad w_1 - 2w_2$$

a zatem $\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{array}\right].$

Wyznaczniki

Definicja:

Niech $A \in M_n^n(F)$ i niech A_{ij} oznacza macierz powstałą z A przez skreślenie $i-$tego wiersza i $j-$tej kolumny.
Wyznacznik macierz A definiujemy indukcyjnie w oparciu o **rozwinięcie Laplace'a** wzdłuż pierwszego wiersza macierzy A:

- $\det([a_{11}]) = a_{11}$;
- $\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \ldots + (-1)^{1+n}\det(A_{1n})$.

Zamiast $\det(A)$ piszemy też $|A|$.
Pojawiające się w definicji wyznaczniki $\det(A_{ij})$ nazywamy **minorami** macierzy A.

Przykład:

1. Niech $A = \left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right]$.

   Wówczas:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2. Niech $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Wówczas:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\ &- a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \end{aligned}$$

Wzór ten stosunkowo łatwo jest zapamiętać stosując **schemat Sarrusa:**

Powiększamy macierz A jeszcze raz przepisując jej dwie pierwsze kolumny:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},$$

Następnie dodajemy do siebie iloczyny wszystkich trójek czynników leżących na przekątnych biegnących z lewego górnego do prawego dolnego rogu oraz odejmujemy iloczyny trójek z przekątnych biegnących od prawego górnego rogu do lewego dolnego:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

i w rezultacie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Widzimy, że obliczanie wyznaczników wprost z definicji jest mało ekonomiczne z obliczeniowego punktu widzenia:

- obliczenie wyznacznika macierzy stopnia 3 wymaga obliczenia 3 wyznaczników macierzy stopnia 2,
- obliczenie macierzy stopnia 4 wymaga obliczenia 4 wyznaczników macierzy stopnia 3, a zatem 12 wyznaczników macierzy stopnia 2 itd.

W praktyce wyznaczniki obliczamy stosując odpowiednie operacje elementarne na wierszach i kolumnach macierzy.

Twierdzenie o wyznaczniku macierzy trójkątnej:

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$ będzie macierzą **trójkątną,** a zatem taką, że $a_{ij} = 0$, gdy $i < j$.
Wówczas
$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Dowód:

Dowód prowadzimy przez indukcję względem n.
Dla $n = 1$ teza jest oczywista.
Załóżmy, że $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$ jest macierzą trójkątną i że wyznacznik każdej macierzy trójkątnej stopnia $n - 1 \geq 1$ równy jest iloczynowi współrzędnych na głównej przekątnej.

Wówczas:

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&- 0 \cdot \det(A_{12}) + \ldots + (-1)^{n+1} 0 \cdot \det(A_{1n}) \\
&= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}
\end{aligned}
$$

wobec założenia indukcyjnego.

Twierdzenie o wyznaczniku macierzy klatkowej:

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$, $B = [b_{ij}] \in M_m^m(F)$, $C = [c_{ij}] \in M_m^n(F)$ i $D = [d_{ij}] \in M_n^m(F)$.
Niech ponadto

$$E = \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline D & B \end{array}\right] = [e_{ij}], \text{ gdzie } e_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{gdy } i \leq n, j \leq n, \\ c_{i,j-n}, & \text{gdy } i \leq n, j > n, \\ d_{i-n,j}, & \text{gdy } i > n, j \leq n, \\ b_{i-n,j-n}, & \text{gdy } i > n, j > n. \end{cases}$$

Wówczas:

1. $\left|\begin{array}{c|c} A & \Theta \\ \hline D & B \end{array}\right| = \det(A) \cdot \det(B)$,
2. $\left|\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline D & \Theta \end{array}\right| = (-1)^{mn} \det(C) \cdot \det(D)$.

Dowód:

Udowodnimy część (1), dowód części (2) jest analogiczny i pozostawimy go jako ćwiczenie.
Dowód prowadzimy przez indukcję względem n.
Dla $n = 1$ i dowolnego m:

$$\left|\begin{array}{c|c} A & \Theta \\ \hline D & B \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccccc} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d_{11} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,m-1} & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{m,m-1} & b_{mm} \end{array}\right|$$

$$= \quad a_{11} \cdot \det(B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Załóżmy, że dowodzony rezultat jest prawdziwy dla dowolnej liczby naturalnej m oraz $n-1 \geq 1$.
Niech $A=[a_{ij}] \in M_n^n(F)$, $B=[b_{ij}] \in M_m^m(F)$, $D=[d_{ij}] \in M_n^m(F)$ i niech D_j oznacza macierz powstałą z D przez wykreślenie $j-$tej kolumny.
Wówczas:

$$\left|\begin{array}{c|c} A & \Theta \\ \hline D & B \end{array}\right| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j} a_{1j} \left|\begin{array}{c|c} A_{1j} & \Theta \\ \hline D_j & B \end{array}\right|.$$

Ponieważ A_{1j} jest macierzą stopnia $n-1$, więc wobec założenia indukcyjnego:

$$\left|\begin{array}{c|c} A_{1j} & \Theta \\ \hline D_j & B \end{array}\right| = \det(A_{1j})\det(B),$$

a stąd:

$$\begin{aligned}
\left|\begin{array}{c|c} A & \Theta \\ \hline D & B \end{array}\right| &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\left|\begin{array}{c|c} A_{1j} & \Theta \\ \hline D_j & B \end{array}\right| \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j})\det(B) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j})\right)\cdot\det(B) = \det(A)\cdot\det(B).
\end{aligned}$$

Twierdzenie o wyznaczniku macierzy transponowanej:

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$ i niech $A^T = [b_i j] \in M_n^n(F)$ będzie macierzą **transponowaną** do A, czyli zdefiniowaną wzorem $b_{ij} = a_{ji}$.
Wówczas
$$\det(A) = \det(A^T).$$

Dowód:

Dowód prowadzimy przez indukcję względem n.
Dla $n = 1$ twierdzenie jest oczywiste, gdyż wówczas $A = A^T$.
Dla $n = 2$ twierdzenie wynika wprost ze wzrów podanych w Przykładzie (1).
Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n - 1 \geq 2$.

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$, niech $A_{i,k;j,l}$ oznacza macierz powstałą z A przez wykreślenie wierszy o wskaźnikach i oraz k, a następnie kolumn o wskaźnikach j oraz l.
Wówczas:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j}) &= \sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j}^T) \\
&= \sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\left(\sum_{i=2}^{n}(-1)^{2+i}a_{i1}\det(A_{1,i;1,j})\right) \\
&= \sum_{i,j=2}^{n}(-1)^{i+j+1}a_{1j}a_{i1}\det(A_{1,i;1,j}).
\end{aligned}$$

Podobnie:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+i}a_{i1}\det((A^T)_{1i}) &= \sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+i}a_{i1}\det(A_{i1}) \\
&= \sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+i}a_{i1}\left(\sum_{j=2}^{n}(-1)^{2+j}a_{1j}\det(A_{1,i;1,j})\right) \\
&= \sum_{i,j=2}^{n}(-1)^{i+j+1}a_{1j}a_{i1}\det(A_{1,i;1,j}).
\end{aligned}$$

Wobec tego:

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) \\
&= \sum_{j=2}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) + a_{11} \det(A_{11}) \\
&= \sum_{i=2}^{n} (-1)^{1+i} a_{i1} \det((A^T)_{1i}) + a_{11} \det((A^T)_{11}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{i1} \det((A^T)_{1i}) = \det(A^T).
\end{aligned}
$$

Twierdzenie o liniowości wyznacznika:

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$.
Oznaczmy $\beta_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$, tak aby

$$A = \left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right].$$

Niech ponadto $\lambda, \mu \in F$ oraz $\beta_i' = \begin{bmatrix} a_{i1}' & \dots & a_{in}' \end{bmatrix}$.
Wówczas

$$\det\left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{i-1} \\ \hline \lambda\beta_i + \mu\beta_i' \\ \hline \beta_{i+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right) = \lambda \det\left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{i-1} \\ \hline \beta_i \\ \hline \beta_{i+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right) + \mu \det\left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{i-1} \\ \hline \beta_i' \\ \hline \beta_{i+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right)$$

Dowód:

Dowód prowadzimy przez indukcję względem n.
Dla $n = 1$ teza jest oczywista.
Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wyznaczników macierzy stopnia $n - 1 \geq 1$.
Jeżeli $i > 1$, to teza wynika wprost z założenia indukcyjnego i definicji wyznacznika.

Załóżmy więc, że $i = 1$.
Wówczas:

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda\beta_1 + \mu\beta_1' \\ \hline \beta_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}\right) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}(\lambda a_{1j} + \mu a_{1j}')\det(A_{1j})$$

$$= \quad \lambda\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j}) + \mu\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}'\det(A_{1j}),$$

gdzie $A = \begin{bmatrix} \lambda\beta_1 + \mu\beta_1' \\ \hline \beta_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}$.

Ponieważ $A_{1j} = \left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \beta_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]_{1j}$ oraz $A_{1j} = \left[\begin{array}{c} \beta_1' \\ \hline \beta_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]_{1j}$ więc

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) = \det\left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \beta_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right)$$

oraz

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}' \det(A_{1j}) = \det\left(\left[\begin{array}{c} \beta_1' \\ \hline \beta_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right)$$

co kończy dowód twierdzenia.

Wniosek:

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$. Oznaczmy:

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \text{ dla } j \in \{1, \dots, n\},$$

tak aby $A = \left[\begin{array}{c|c|c} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{array}\right]$. Niech ponadto $\lambda, \mu \in F$ oraz

$$\alpha_j' = \begin{bmatrix} a_{1j}' \\ \vdots \\ a_{nj}' \end{bmatrix}.$$

Wówczas:

$$\begin{aligned} &\det\left(\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \alpha_1 & \dots & \alpha_{j-1} & \lambda\alpha_j + \mu\alpha_j' & \alpha_{j+1} & \dots & \alpha_n \end{array}\right]\right) \\ &= \lambda \det\left(\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \alpha_1 & \dots & \alpha_{j-1} & \alpha_j & \alpha_{j+1} & \dots & \alpha_n \end{array}\right]\right) \\ &+ \mu \det\left(\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \alpha_1 & \dots & \alpha_{j-1} & \alpha_j' & \alpha_{j+1} & \dots & \alpha_n \end{array}\right]\right). \end{aligned}$$

Wniosek o związku wyznacznika z operacjami elementarnymi typu 2:

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$.

1. Jeżeli w macierzy A pomnożymy $i-$ty wiersz przez $\lambda \in F$, to wyznacznik $\det(A)$ również należy pomnożyć przez $\lambda \in F$.
2. Jeżeli w macierzy A pomnożymy $j-$tą kolumnę przez $\lambda \in F$, to wyznacznik $\det(A)$ również należy pomnożyć przez $\lambda \in F$.

Twierdzenie:

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$.
Oznaczmy $\beta_i = \left[\begin{array}{ccc} a_{i1} & \ldots & a_{in} \end{array}\right]$, dla $i \in \{1, \ldots, n\}$, tak aby

$$A = \left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right].$$

Jeżeli $\beta_i = \beta_k$, dla pewnych $i, k \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq k$, to wówczas $\det(A) = 0$.

Dowód:

Możemy bez straty ogólności założyć, że $i < k$.
Dowód prowadzimy przez indukcję względem n.
Jeżeli $n = 2$, to $i = 1$ oraz $k = 2$ i dowodzony wzór wynika wprost ze wzoru na wyznacznik macierzy stopnia 2.
Założmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla macierzy stopnia $n - 1 \geq 2$.
Jeżeli $i > 1$ to teza wynika wprost z założenia indukcyjnego i definicji wyznacznika.

Załóżmy więc, że $i = 1$.
Możemy również założyć, że $k = 2$, jeżeli bowiem $k > 2$, to na mocy udowodnionej już części twierdzenia:

$$\det\left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \beta_2 + \beta_k \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_2 + \beta_k \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}\right) = 0, \det\left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \beta_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_2 \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}\right) = 0, \det\left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \beta_k \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_k \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}\right) = 0.$$

Wobec Twierdzenia o liniowości wyznacznika:

$$\det\left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \beta_2+\beta_k \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_2+\beta_k \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \beta_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_2 \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}\right) + \det\left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \beta_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_k \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}\right)$$

$$+ \quad \det\left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \beta_k \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_2 \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}\right) + \det\left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \beta_k \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_k \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}\right),$$

skąd

$$\det(A) = -\det\left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \beta_k \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_2 \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}\right)$$

i tym samym wystarczy rozważać przypadek $i = 1$ oraz $k = 2$.

Oznaczmy przez $A_{1,2;st}$ macierz powstałą z A przez skreślenie dwóch pierwszych wierszy oraz kolumn o wskaźnikach s i t. Wówczas:

$$
\begin{aligned}
\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) \\
= \quad & \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j} a_{1j} \left[\left(\sum_{s=1}^{j-1}(-1)^{1+s} a_{2s} \det(A_{1,2;s,j})\right)\right. \\
+ \quad & \left.\left(\sum_{s=j+1}^{n}(-1)^{s} a_{2s} \det(A_{1,2;j,s})\right)\right] \\
= \quad & \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j} a_{1j} \left[\left(\sum_{s=1}^{j-1}(-1)^{1+s} a_{1s} \det(A_{1,2;s,j})\right)\right. \\
+ \quad & \left.\left(\sum_{s=j+1}^{n}(-1)^{s} a_{1s} \det(A_{1,2;j,s})\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & a_{11}a_{12}\det(A_{1,2;1,2}) + \ldots + (-1)^n a_{11}a_{1n}\det(A_{1,2;1,n}) \\
- \quad & a_{12}a_{11}\det(A_{1,2;1,2}) + \ldots + (-1)^n a_{12}a_{1n}\det(A_{1,2;2,n}) \\
\vdots \quad & \\
+ \quad & (-1)^n a_{1n}a_{11}\det(A_{1,2;1,n}) + \ldots + a_{1n}a_{1,n-1}\det(A_{1,2;n-1,n}) = 0.
\end{aligned}
$$

Wniosek:

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$. Oznaczmy:

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \text{ dla } j \in \{1, \ldots, n\},$$

tak aby $A = \left[\begin{array}{c|c|c} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \end{array} \right]$. Jeżeli $\alpha_i = \alpha_k$, dla pewnych $i, k \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq k$, to wówczas $\det(A) = 0$.

Wniosek o związku z operacjami elementarnymi typu 1:

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$, $\beta_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}$.

Wówczas $\det(A) = -\det \left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{i-1} \\ \hline \beta_k \\ \hline \beta_{i+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_i \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix} \right)$.

Dowód:

Rozważmy macierz $B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{i-1} \\ \hline \beta_i + \beta_k \\ \hline \beta_{i+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_i + \beta_k \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}$.

Wobec Twierdzenia o liniowości wyznacznika $\det(B) = 0$.
Ponadto:

$$\det B = \det(A)$$

$$+ \quad \det\left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{i-1} \\ \hline \beta_k \\ \hline \beta_{i+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_i \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}\right) + \det\left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{i-1} \\ \hline \beta_k \\ \hline \beta_{i+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_k \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}\right) + \det\left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{i-1} \\ \hline \beta_i \\ \hline \beta_{i+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_i \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det(A) + \det\left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{i-1} \\ \hline \beta_k \\ \hline \beta_{i+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{k-1} \\ \hline \beta_i \\ \hline \beta_{k+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}\right).$$

Wniosek o związku z operacjami elementarnymi typu 1:

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$. Oznaczmy:

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \text{ dla } j \in \{1, \ldots, n\},$$

tak aby $A = \left[\ \alpha_1 \ \middle| \ \ldots \ \middle| \ \alpha_n \ \right]$. Wówczas

$|A| = -\left| \ \alpha_1 \ \middle| \ \ldots \ \middle| \ \alpha_{i-1} \ \middle| \ \alpha_k \ \middle| \ \alpha_{i+1} \ \middle| \ \ldots \ \middle| \ \alpha_{k-1} \ \middle| \ \alpha_i \ \middle| \ \alpha_{k+1} \ \middle| \ \ldots \ \middle| \ \alpha_n \ \right|.$

Wniosek o związku z operacjami elementarnymi typu 3:

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$.
Oznaczmy $\beta_i = \left[\begin{array}{ccc} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{array}\right]$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$, tak aby

$$A = \left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right].$$

Niech $\lambda \in F$.
Wówczas:

$$\det(A) = \det\left(\left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_i \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_k + \lambda\beta_i \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right]\right).$$

Dowód:

Wystarczy zauważyć, że:

$$\det\left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_i \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_k + \lambda\beta_i \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_i \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_k \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}\right) + \lambda\det\left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_i \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_i \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}\right) = \det(A).$$

Wniosek o związku z operacjami elementarnymi typu 3:

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$. Oznaczmy:

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \text{ dla } j \in \{1, \ldots, n\},$$

tak aby $A = \left[\ \alpha_1 \mid \ldots \mid \alpha_n\ \right]$. Wówczas
$\det(A) = -\det\left(\left[\ \alpha_1 \mid \ldots \mid \alpha_i \mid \ldots \mid \alpha_k + \lambda\alpha_i \mid \ldots \mid \alpha_n\ \right]\right)$.

Przykłady:

3. Twierdzenie o wyznaczniku macierzy trójkątnej wraz z wnioskami o związkach z operacjami elementarnymi dają praktyczną metodę obliczania wyznaczników: najpierw sprowadzamy daną macierz przez ciąg operacji elementarnych do macierzy trójkątnej, a następnie mnożymy wyrazy na głównej przekątnej.
   Dla przykładu obliczymy wyznacznik macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Mamy kolejno:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ w_2 - 3w_1 \\ w_3 - 7w_1 \\ w_4 - w_1 \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \qquad k_2 - k_1 \quad k_3 - 2k_1 \quad k_4 - k_1 \end{array} \begin{array}{l} \\ w_2 : (-2) \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= (-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ w_3 + w_2 \\ \\ \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ w_3 \downarrow \\ w_4 \uparrow \end{array} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k_3 - k_2 \quad k_4 + k_2 \\
&= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ w_4 + 13w_3 \end{array} \\
&= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 30 = 60
\end{aligned}
$$

Wniosek:

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$. Wówczas $\det(A) \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest elementarnie równoważna macierzy I_n.

Podamy teraz trzy ważne rezultaty teoretyczne:

- uogólnienie drugiej części definicji wyznacznika (twierdzenie Laplace'a),
- związek z układami równań (twierdzenie Cramera)
- i związek z mnożeniem macierzy (twierdzenie Cauchy'ego).

Rozwinięcie Laplace'a:

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$ i niech A_{ij} oznacza macierz powstałą z A przez skreślenie $i-$tego wiersza i $j-$tej kolumny. Wówczas

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \text{ dla dowolnych } i \in \{1, \ldots, n\}, \\ \det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \text{ dla dowolnych } j \in \{1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Dowód:

Udowodnimy pierwszą część twierdzenia, dowód drugiej części będzie wynikał wprost z Twierdzenia o wyznaczniku macierzy transponowanej.
Oznaczmy $\beta_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$, tak aby

$$A = \left[\begin{array}{c} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{array}\right].$$

Jeśli $i = 1$ to teza twierdzenia wynika wprost z definicji wyznacznika.

Załóżmy, że $i \neq 1$.
Niech:

$$A' = \begin{bmatrix} \beta_i \\ \hline \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_{i-1} \\ \hline \beta_{i+1} \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_n \end{bmatrix}.$$

Wówczas $A_{ij} = A'_{1j}$ oraz, stosując kolejno $i-1$ razy Wniosek o związku z operacjami elementarnymi typu 1

$$\det(A') = (-1)^{i-1} \det(A).$$

Stąd:

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= (-1)^{i-1}\det(A') \\
&= (-1)^{i-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{ij}\det(A'_{1j}) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij}).
\end{aligned}
$$

Wzory Cramera:

Rozważmy układ równań:

$$\mathcal{U}: \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Niech $A = [a_{ij}] \in M_n^n(F)$ będzie macierzą współczynników lewych stron równań układu $\mathcal{U}$ i oznaczmy przez A_j macierz powstałą z A przez zastąpienie $j-$tej kolumny kolumną wyrazów wolnych. Wówczas układ $\mathcal{U}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(A) \neq 0$ i wyraża się ono wzorami

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}.$$

Dowód:

Wyznacznik $\det(A) \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest elementarnie równoważna macierzy I_n, a to z kolei ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy układ $\mathcal{U}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Pozostaje udowodnić, że

$$a_{i1}\frac{\det(A_1)}{\det(A)} + a_{i2}\frac{\det(A_2)}{\det(A)} + \ldots + a_{1n}\frac{\det(A_n)}{\det(A)} = b_i,$$

dla $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Wobec wzorów Laplace'a

$$\det(A_j) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} b_i \det(A_{ij}), \text{ dla } j \in \{1, \ldots, n\},$$

a wobec tego

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det(A_j) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} b_i \det(A_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \right) \\ &= c_i \det(A).\end{aligned}$$

Twierdzenie Cauchy'ego:

Niech $A, B \in M_n^n(F)$. Wówczas $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Dowód:

Niech

$$C = \left[\begin{array}{c|c} A & \Theta \\ \hline -I_n & B \end{array}\right].$$

Wobec twierdzenia o wyznaczniku macierzy klatkowej:

$$\det(C) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Niech C' oznacza macierz powstałą przez dodanie do $(n+j)-$tej kolumny macierzy C, dla $j \in \{1, \ldots, n\}$, kolumnę pierwszą pomnożoną przez b_{1j}, kolumnę drugą pomnożoną przez b_{2j}, ..., kolumnę $n-$tą pomnożoną przez b_{nj}.
Wówczas $\det(C) = \det(C')$ i łatwo spostrzec, że

$$C' = \left[\begin{array}{c|c} A & AB \\ \hline -I_n & \Theta \end{array}\right].$$

Z drugiej strony

$$\det(C') = (-1)^{n^2} \det(AB) \det(-I) = (-1)^{n^2} (-1)^n \det(AB) = \det(AB),$$

gdyż dla dowolnej liczby całkowitej $n^2 + n$ jest liczbą parzystą.