1. Zestaw zadań 6: Homomorfizmy modułów. Moduł ilorazowy, twierdzenie o homomorfizmie.

(1) Pokazać, że homomorfizm modułów jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy jest homomorfizmem kategoryjnym.

(2) Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R-modułami, $\phi : M \to N$ homomorfizmem modułów, niech $M_1 < M$, $N_1 < N$. Pokazać, że wówczas:
   (a) $\phi(M_1) < N$;
   (b) $\phi^{-1}(N_1) < M$.

(3) Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R-modułami, $\pi : M \to N$ homomorfizmem surjektywnym modułów i niech $K = \ker \pi$. Oznaczmy

$$\mathcal{M} = \{M_1 : M_1 < M \text{ oraz } K \subset M_1\}, \mathcal{N} = \{N_1 : N_1 < N\}.$$

Pokazać, że wówczas odwzorowania

$$\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}, \phi(M_1) = \pi(M_1),$$

$$\psi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}, \psi(N_1) = \pi^{-1}(N)1)$$

są wzajemnie odwrotne.

(4) Niech R będzie pierścieniem, M lewym R-modułem, $N < M$. Oznaczmy

$$m + N = \{m + n : n \in N\},$$

$$M/N = \{m + N : m \in M\}$$

i w zbiorze M/N określmy działania dodowania i mnożenia zewnętrznego:

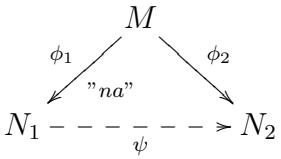
$$(m_1 + N) + (m_2 + N) = (m_1 + m_2) + N,$$

$$a(m + N) = am + N.$$

Pokazać, że wówczas M/N jest lewym R-modułem.

(5) Niech R będzie pierścieniem, M lewym R-modułem, $N \subset M$. Pokazać, że wówczas $N < M$ wtedy i tylko wtedy, gdy N jest jądrem pewnego homomorfizmu.

(6) Niech R będzie pierścieniem, M, N_1, N_2 lewymi R-modułami, $\phi_1 : M \to N_1$ homomorfizmem surjektywnym, $\phi_2 : M \to N_2$ homomorfizmem.
   (a) Pokazać, że jeśli istnieje homomorfizm $\psi : N_1 \to N_2$ taki, że $\psi \circ \phi_1 = \phi_2$, to $\ker \phi_1 \subset \ker \phi_2$.
   (b) Pokazać, że jeśli $\ker \phi_1 \subset \ker \phi_2$, to istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\psi : N_1 \to N_2$ taki, że $\psi \circ \phi_1 = \phi_2$. Ponadto wówczas $\mathrm{im}\psi = \mathrm{im}\phi_2$ oraz $\ker \psi = \phi_1(\ker \phi_2)$.
   Inaczej: diagram



   jest przemienny.

(7) Niech R będzie pierścieniem, M lewym R-modułem, $N_1, N_2 < M$. Pokazać, że wówczas

$$N_1/N_1 \cap N_2 \cong (N_1 + N_2)/N_2.$$

(8) Niech R będzie pierścieniem, M lewym R-modułem, $N_1, N_2 < M$, $N_1 \subset N_2$. Pokazać, że wówczas

$$M/N_2 \cong (M/N_1)/(N_2/N_1).$$

(9) Niech R będzie pierścieniem z jedynką, M lewym unitarnym R-modułem cyklicznym. Pokazać, że wówczas $M \cong R/I$, gdzie $I \lhd R$ jest pewnym ideałem lewostronnym.

Zadanie domowe: zadania 1, 2 i 3 należy rozwiązać na następne zajęcia.