

1. ZESTAW ZADAŃ 5: POJĘCIE MODUŁU. PODMODUŁY. PODMODUŁY GENEROWANE PRZEZ ZBIÓR.

- (1) Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, $\mathcal{R} = \{N_i : i \in I\}$ rodziną podmodułów modułu M . Pokazać, że wówczas:

(a) $\bigcap_{i \in I} N_i$ jest podmodułem modułu M ,

(b) $\bigcup_{i \in I} N_i$ jest podmodułem modułu M wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{R}$ jest łańcuchem.

- (2) Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, niech $S \subset M$. Pokazać, że wówczas:

$$\langle S \rangle = \{a_1 s_1 + \dots + a_n s_n + b_1 t_1 + \dots + b_m t_m : a_i \in R, s_i \in S, b_j \in \mathbb{Z}, t_j \in S\}.$$

Ponadto pokazać, że jeśli R jest pierścieniem z jedynką, a M lewym unitarnym R -modułem, to wówczas:

$$\langle S \rangle = \{a_1 s_1 + \dots + a_n s_n : a_i \in R, s_i \in S\}.$$

- (3) Niech R będzie pierścieniem, M lewym R -modułem, niech $N_1, N_2 < M$. Pokazać, że wówczas

$$\langle N_1 \cup N_2 \rangle = \{n_1 + n_2 : n_1 \in N_1, n_2 \in N_2\}.$$

- (4) Wskazać przykład skończenie generowanego modułu, który nie jest skończenie generowaną grupą abelową.

- (5) Niech R i S będą pierścieniami, niech $\phi : R \rightarrow S$ będzie homomorfizmem pierścieni. Pokazać, że dowolny S -moduł M może być wyposażony w strukturę R -modułu poprzez zdefiniowanie działania $rm, r \in R, m \in M$ jako $\phi(r)m$.

- (6) Niech R będzie pierścieniem, $I \triangleleft R$ ideałem dwustronnym, M niech będzie lewym R -modułem.

Pokazać, że M/IM jest R/I -modułem z działaniem zewnętrznym $(r + I)(a + IA) = ra + IA$.

Zadanie domowe: zadania 4, 5 i 6 należy rozwiązać na następne zajęcia.