

1. ZESTAW ZADAŃ 2: KOPRODUKTY GRUP.

- (1) Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, niech $\{G_i : i \in I\}$ będzie rodziną podgrup generującą G . Załóżmy, że $G_i \cap G_j = \{1\}$ dla $i \neq j$. Pokazać, iż wówczas $G = \prod_{i \in I}^* G_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy 1 jest reprezentowana przez dokładnie jedno słowo.
- (2) Rozważmy grupę $S(3)$. Niech

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Niech $G_1 = \langle \sigma_1 \rangle$, $G_2 = \langle \sigma_2 \rangle$. Pokazać, że wówczas rodzina $\{G_1, G_2\}$ generuje $S(3)$, ale $S(3) \neq G_1 * G_2$.

- (3) Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $\{G_i : i \in I\}$ rodziną podgrup grupy G . Pokazać, że jeżeli $G = \prod_{i \in I}^* G_i$, to wówczas spełniony jest następujący warunek:

$\forall H$ – grupa $\forall h_i : G_i \rightarrow H$ – homomorfizmy $\exists! h : G \rightarrow H$ – homomorfizm $\forall i \in I [h \upharpoonright_{G_i} = h_i]$.

- (4) Niech $\{G_i : i \in I\}$ będzie rodziną grup, H pewną grupą, niech $\{\phi_i : G_i \rightarrow H : i \in I\}$ będzie rodziną homomorfizmów grup. Pokazać, że wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\phi : \prod_{i \in I}^* G_i \rightarrow H$ taki, że

$$\phi \circ \iota_i = \phi_i,$$

dla $i \in I$. Innymi słowy, następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I}^* G_i & \xrightarrow{\phi} & H \\ \uparrow \iota_i & \nearrow \phi_i & \\ G_i & & \end{array}$$

Ponadto pokazać, że jeśli grupa G ma powyższą własność, to wówczas $G \cong \prod_{i \in I}^* G_i$.

- (5) Pokazać, że dla dowolnych grup A, B, C zachodzi $A * B \cong B * A$ oraz $A * (B * C) \cong (A * B) * C$.
- (6) Pokazać, że jeśli N jest najmniejszą podgrupą normalną grupy $A * B$ zawierającą grupę A , to wówczas $(A * B)/N \cong B$.
- (7) Pokazać, że jeśli grupy A i B mają więcej niż jeden element, to grupa $A * B$ jest nieskończona oraz $Z(A * B) = \{1\}$.
- (8) Pokazać, że jeśli $f : G_1 \rightarrow G_2$ oraz $g : H_1 \rightarrow H_2$ są homomorfizmami grup, to wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm $h : G_1 * H_1 \rightarrow G_2 * H_2$ taki, że $h \upharpoonright_{G_1} = f$ oraz $h \upharpoonright_{H_1} = g$.

Zadanie domowe: zadania 1, 2 i 3 należy rozwiązać na następne zajęcia.