

1. ZESTAW ZADAŃ 1: PRODUKTY GRUP. PRODUKTY I KOPRODUKTY GRUP ABELOWYCH.

- (1) Niech  $\{G_i : i \in I\}$  będzie rodziną (możliwie nieskończoną) grup, niech

$$\prod_{i \in I} G_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i : f(i) \in G_i\}$$

będzie produktem kartezjańskim rodziny zbiorów  $\{G_i : i \in I\}$ . Jeżeli  $f, g \in \prod_{i \in I} G_i$ , to iloczyn  $f \cdot g$  definiujemy jako funkcję  $f \cdot g : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i$  daną wzorem

$$f \cdot g(i) = f(i)g(i).$$

Pokazać, że  $(\prod_{i \in I} G_i, \cdot)$  jest grupą, którą nazywamy **iloczynem prostym zewnętrznym**.

Ponadto definiujemy odwzorowania  $\pi_i : \prod_{i \in I} G_i \rightarrow G_i$  wzorem

$$\pi_i(a) = a(i),$$

dla  $i \in I$ . Pokazać, że  $\pi_i, i \in I$ , są dobrze określonymi epimorfizmami grup, które nazywamy **epimorfizmami kanonicznymi**.

- (2) Niech  $\{G_i : i \in I\}$  będzie rodziną (możliwie nieskończoną) grup, niech

$$\prod_{i \in I} G_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i : f(i) \in G_i\}$$

będzie produktem kartezjańskim rodziny zbiorów  $\{G_i : i \in I\}$ . W zbiorze  $\prod_{i \in I} G_i$  rozpatrzmy podzbiór

$$\prod_{i \in I}^w G_i = \{f \in \prod_{i \in I} G_i : f(i) = 1_{G_i} \text{ dla prawie wszystkich } i \in I\}.$$

Iloczyn  $f \cdot g$ , dla  $f, g \in \prod_{i \in I}^w G_i$  definiujemy jak w grupie  $\prod_{i \in I} G_i$ . Pokazać, że  $(\prod_{i \in I}^w G_i, \cdot)$  jest grupą, którą nazywamy **słabym iloczynem prostym zewnętrznym**. W przypadku, gdy grupy  $G_i, i \in I$ , są abelowe, piszemy na ogół  $\prod_{i \in I} G_i$ , a w przypadku, gdy  $G_i, i \in I$ , są abelowe i zapisane w notacji addytywnej, piszemy na ogół  $\sum_{i \in I} G_i$ .

Ponadto definiujemy odwzorowania  $\iota_i : G_i \rightarrow \prod_{i \in I}^w G_i$  wzorem

$$\pi_i(a) = \bar{a}, \text{ gdzie } \bar{a}(j) = \begin{cases} a, & \text{gdy } j = i, \\ 1_{G_j}, & \text{gdy } j \neq i, \end{cases}$$

dla  $i \in I$ . Pokazać, że  $\iota_i, i \in I$ , są dobrze określonymi monomorfizmami grup, które nazywamy **monomorfizmami kanonicznymi**.

- (3) Niech  $(G, \cdot)$  będzie grupą, niech  $\{H_i : i \in I\}$  będzie rodziną (możliwie nieskończoną) podgrup normalnych grup  $G$ . Pokazać, że następujące warunki są równoważne:

(a)  $G = \prod_{i \in I}^w G_i$ ,

(b) każdy element  $g \in G \setminus \{1\}$  ma jednoznaczne przedstawienie w postaci

$$g = h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_n},$$

gdzie  $i_1, \dots, i_n$  są różnymi elementami zbioru  $I$  oraz  $h_{i_k} \neq 1, k \in \{1, \dots, n\}$ .

- (4) Niech  $(G, \cdot)$  będzie grupą, niech  $\{H_i : i \in I\}$  będzie rodziną (możliwie nieskończoną) podgrup normalnych grup  $G$ . Wówczas, jeżeli

(a)  $G = \langle \bigcup_{i \in I} H_i \rangle$  oraz

(b) dla każdego  $k \in I, N_k \cap \langle \bigcup_{i \in I \setminus \{k\}} H_i \rangle,$

to  $G \cong \prod_{i \in I}^w H_i$ .

- (5) Niech  $\{G_i : i \in I\}$  będzie rodziną grup,  $H$  pewną grupą, niech  $\{\phi_i : H \rightarrow G_i : i \in I\}$  będzie rodziną homomorfizmów grup. Pokazać, że wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm  $\phi : H \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$  taki, że

$$\pi_i \circ \phi = \phi_i,$$

dla  $i \in I$ . Ponadto pokazać, że jeśli grupa  $G$  ma powyższą własność, to wówczas  $G \cong \prod_{i \in I} G_i$ .

- (6) Niech  $\{G_i : i \in I\}$  będzie rodziną grup abelowych,  $H$  pewną grupą abelową, niech  $\{\phi_i : G_i \rightarrow H : i \in I\}$  będzie rodziną homomorfizmów grup. Pokazać, że wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm  $\phi : \prod_{i \in I} G_i \rightarrow H$  taki, że

$$\phi \circ \iota_i = \phi_i,$$

dla  $i \in I$ . Ponadto pokazać, że jeśli grupa abelowa  $G$  ma powyższą własność, to wówczas  $G \cong \prod_{i \in I} G_i$ .

- (7) Pokazać, że powyższe twierdzenie jest fałszywe, jeśli rozważane grupy nie są abelowe (wskazówka: wystarczy ograniczyć się do przypadku rodziny dwóch grup nieabelowych).

**Zadanie domowe:** zadania 4, 6 i 7 należy rozwiązać na następne zajęcia.