

14. WYKŁAD 14: WPROWADZENIE DO TEORII KATEGORII: PRODUKTY, KOPRODUKTY, OBIEKTY WOLNE I MORFIZMY.

Definicja 14.1. *Kategoria $\mathcal{C}$ składa się z klasy obiektów $Ob(\mathcal{C})$, oznaczanych przez $A, B, C, \dots$ oraz klasy morfizmów (lub strzałek) $Ar(\mathcal{C})$ wraz z:*

- (1) *klasą parami rozłącznych klas $Hom(A, B)$, jednym dla każdej pary obiektów $A, B \in Ob(\mathcal{C})$; element f zbioru $Hom(A, B)$ nazywamy **morfizmem** z A do B i oznaczamy $A \xrightarrow{f} B$ lub $f : A \rightarrow B$,*
- (2) *funkcjami $Hom(B, C) \times Hom(A, B) \rightarrow Hom(A, C)$, dla każdej trójki $A, B, C \in Ob(\mathcal{C})$, zwanej **składaniem morfizmów**; dla morfizmów $A \xrightarrow{f} B$ oraz $B \xrightarrow{g} C$ wartości tej funkcji oznaczamy $(g, f) \mapsto g \circ f$ a morfizm $A \xrightarrow{g \circ f} C$ nazywamy **złożeniem** morfizmów $A \xrightarrow{f} B$ i $B \xrightarrow{g} C$.*

Ponadto spełnione są następujące aksjomaty:

Łączność: jeśli $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ oraz $C \xrightarrow{h} D$ są morfizmami w $\mathcal{C}$, to

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Identyczność:: dla każdego obiektu $B \in \mathcal{C}$ istnieje morfizm $B \xrightarrow{1_B} B$ taki, że dla dowolnych $A \xrightarrow{f} B$ oraz $B \xrightarrow{g} C$:

$$1_B \circ f = f \text{ oraz } g \circ 1_B = g.$$

Jeżeli klasy $Ob(\mathcal{C})$ oraz $Ar(\mathcal{C})$ nie są klasami właściwymi, ale zbiorami, kategorię $\mathcal{C}$ nazywamy **małą**. Jeśli klasy $Hom(A, B)$, dla każdej pary obiektów $A, B \in Ob(\mathcal{C})$, nie są klasami właściwymi, ale zbiorami, kategorię $\mathcal{C}$ nazywamy **lokalnie małą**.

Izomorfizmem nazywamy morfizm $A \xrightarrow{f} B$ taki, że istnieje morfizm $B \xrightarrow{g} A$ taki, że

$$f \circ g = 1_B \text{ oraz } g \circ f = 1_A.$$

Jeżeli pomiędzy dwoma obiektami istnieje izomorfizm $A \xrightarrow{f} B$, to obiekty te nazywamy **izomorficznymi** i oznaczamy $A \cong B$.

Automorfizmem nazywamy izomorfizm $A \xrightarrow{f} A$. **Endomorfizmem** nazywamy morfizm $A \xrightarrow{f} A$.

Przykłady:

- (1) Klasa $\mathcal{Set}$ wszystkich zbiorów tworzy kategorię, w której morfizmami są funkcje, a składanie morfizmów jest składaniem funkcji.
- (2) Klasa $\mathcal{Grp}$ wszystkich grup tworzy kategorię, w której morfizmami są homomorfizmy grup, a składanie morfizmów jest składaniem funkcji.
- (3) Klasa $\mathcal{Ab}$ wszystkich grup abelowych tworzy kategorię, w której morfizmami są homomorfizmy grup abelowych, a składanie morfizmów jest składaniem funkcji.
- (4) Klasa $\mathcal{Rng}$ wszystkich pierścieni tworzy kategorię, w której morfizmami są homomorfizmy pierścieni, a składanie morfizmów jest składaniem funkcji.
- (5) Niech R będzie pierścieniem. Klasa $R - \mathcal{Mod}$ wszystkich lewych R -modułów tworzy kategorię, w której morfizmami są homomorfizmy lewych R -modułów, a składanie morfizmów jest składaniem funkcji.
- (6) Klasa $\mathcal{Top}$ wszystkich przestrzeni topologicznych tworzy kategorię, w której morfizmami są funkcje ciągłe, a składanie morfizmów jest składaniem funkcji.
- (7) Klasa $\mathcal{Metr}$ wszystkich przestrzeni metrycznych tworzy kategorię, w której morfizmami są kontrakcje, a składanie morfizmów jest składaniem funkcji; przypomnijmy, że kontrakcją przestrzeni

metrycznej (X, ρ_X) w (Y, ρ_Y) nazywamy funkcję $f : X \rightarrow Y$ taką, że

$$\forall x, y \in X [\rho_Y(f(x), f(y)) \leq \rho_X(x, y)].$$

- (8) Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Wówczas G jest kategorią, w której jedynym obiektem jest zbiór G , zaś morfizmami ze zbioru $Hom(G, G)$ wszystkie elementy grupy G , a składanie morfizmów jest mnożeniem w grupie G .
- (9) Niech $(P, \leq)$ będzie preporządkiem, tzn. zbiorem z określoną na nim relacją $\leq$, która jest zwrotna i przechodnia. Wówczas P jest kategorią, w której obiektami są elementy zbioru P , zaś zbiór morfizmów ze zbioru $Hom(a, b)$ jest co najwyżej jednoelementowy i zdefiniowany warunkiem:

$$a \rightarrow b \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a \leq b.$$

Ponieważ relacja $\leq$ jest przechodnia, więc składanie morfizmów jest dobrze określone.

- (10) Niech n będzie liczbą porządkową, tzn. typem porządkowym zbioru dobrze uporządkowanego; przypomnijmy, że porządek $(P, \leq)$ jest dobry, jeżeli relacja $\leq$ jest antysymetryczna, przechodnia, zupełna i każdy niepusty podzbiór S zbioru P ma względem niej element najmniejszy, z kolei dwa porządki $(P_1, \leq_1)$ oraz $(P_2, \leq_2)$ mają ten sam typ, jeżeli istnieje bijekcja $f : P_1 \rightarrow P_2$ taka, że

$$\forall a, b \in P_1 [a \leq_1 b \Rightarrow f(a) \leq_2 f(b)];$$

określona w ten sposób relacja pomiędzy zbiorami uporządkowanymi jest relacją równoważności, a jej klasy abstrakcji nazywamy typami porządkowymi. Skończoną liczbę porządkową n będziemy rozważać jako dobrze uporządkowany zbiór poprzedzających ją liczb porządkowych:

$$n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\},$$

0 będziemy traktować jako zbiór pusty, a pierwszą nieskończoną liczbę porządkową ω (tzn. typ porządkowy zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$) będziemy utożsamiali z dobrze uporządkowanym zbiorem:

$$\omega = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

W szczególności każda liczba porządkowa jest kategorią. Na przykład 3 jest kategorią, w której obiektami są elementy zbioru $\{0, 1, 2\}$, zaś zbiorem morfizmów są następujące strzałki:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$$

wraz ze wszystkimi swoimi złożeniami. Podobnie ω jest kategorią, w której obiektami są elementy zbioru $\{0, 1, 2, \dots\}$, zaś zbiorem morfizmów są strzałki:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$$

wraz ze wszystkimi swoimi złożeniami.

- (11) Klasa Ord wszystkich skończonych liczb porządkowych tworzy kategorię, w której morfizmami są funkcje zachowujące porządek, tzn., dla danych skończonych liczb porządkowych $m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ oraz $n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, funkcje $f : m \rightarrow n$ takie, że

$$\forall i, j \in m [i \leq j \Rightarrow f(i) \leq f(j)].$$

Ponieważ złożenie dwóch funkcji zachowujących porządek jest funkcją zachowującą porządek, więc składanie morfizmów jest dobrze określone. Kategorię Ord , w zależności od kontekstu, oznacza się też przez Δ i nazywa kategorią sympleksu.

- (12) Niech $\mathcal{C}$ będzie dowolną kategorią. Klasa $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ wszystkich strzałek kategorii $\mathcal{C}$ jest kategorią, której obiektami są morfizmy kategorii $\mathcal{C}$, a morfizmy określone są następująco: jeżeli $f, g \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\rightarrow})$, przy czym $A \xrightarrow{f} B$ oraz $C \xrightarrow{g} D$, to $\text{Hom}(f, g)$ składa się z wszystkich par (ϕ, ψ) takich, że $A \xrightarrow{\phi} C$, $B \xrightarrow{\psi} D$ oraz $\psi \circ f = g \circ \phi$; innymi słowy diagram

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

jest przemienny.

- (13) Niech $\mathcal{I}$ będzie dowolną klasą. Klasa $\mathcal{I}$ jest kategorią, której obiektami są elementy klasy $\mathcal{I}$, a morfizmami odwzorowania identycznościowe. Kategoria ta nazywana jest kategorią dyskretną.

Definicja 14.2. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie rodziną obiektów kategorii $\mathcal{C}$. **Produktem** rodziny $\{A_i : i \in I\}$ nazywamy obiekt P wraz z rodziną morfizmów $\{P \xrightarrow{\pi_i} A_i : i \in I\}$ takie, że dla dowolnego obiektu B i dowolnej rodziny morfizmów $\{B \xrightarrow{\phi_i} A_i : i \in I\}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $B \xrightarrow{\phi} P$ taki, że

$$\pi_i \circ \phi = \phi_i,$$

dla $i \in I$. Innymi słowy, następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\phi} & P \\ & \searrow \phi_i & \downarrow \pi_i \\ & & A_i \end{array}$$

Produkt P oznaczamy przez $\prod_{i \in I} A_i$.

Przykłady:

- (14) Produkty istnieją w kategorii $\mathcal{Set}$, są nimi produkty kartezjańskie wraz z epimorfizmami kanonicznymi.
- (15) Produkty istnieją w kategorii $\mathcal{Grp}$, są nimi produkty grup wraz z epimorfizmami kanonicznymi.
- (16) Produkty istnieją w kategorii $\mathcal{Ab}$, są nimi produkty grup abelowych wraz z epimorfizmami kanonicznymi.
- (17) Produkty istnieją w kategorii $\mathcal{Rng}$.
- (18) Produkty istnieją w kategorii $\mathcal{R-Mod}$.
- (19) Produkty istnieją w kategorii $\mathcal{Top}$.
- (20) Produkty nie istnieją w kategorii $\mathcal{Metr}$.
- (21) Produkty istnieją w kategorii $\mathcal{Ord}$.

Definicja 14.3. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie rodziną obiektów kategorii $\mathcal{C}$. **Produktem** rodziny $\{A_i : i \in I\}$ nazywamy obiekt S wraz z rodziną morfizmów $\{A_i \xrightarrow{\iota_i} S : i \in I\}$ takie, że dla dowolnego obiektu B i dowolnej rodziny morfizmów $\{A_i \xrightarrow{\psi_i} S : i \in I\}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $S \xrightarrow{\psi} B$ taki, że

$$\psi \circ \iota_i = \psi_i,$$

dla $i \in I$. Innymi słowy, następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} & S & \xrightarrow{\psi} B \\ \uparrow \iota_i & \nearrow \psi_i & \\ A_i & & \end{array}$$

Koprodukt S oznaczamy przez $\coprod_{i \in I} A_i$.

Przykłady:

- (22) Koprodukty istnieją w kategorii $\mathcal{Set}$, są nimi rozłączne sumy wraz z monomorfizmami kanonicznymi.
- (23) Koprodukty istnieją w kategorii $\mathcal{Ab}$, są nimi (zewnątrzne) sumy proste grup abelowych wraz z monomorfizmami kanonicznymi.
- (24) Koprodukty istnieją w kategorii $\mathcal{Grp}$, są nimi (zewnątrzne) iloczyny wolne grup wraz z monomorfizmami kanonicznymi.
- (25) Koprodukty istnieją w kategorii $R - \mathcal{Mod}$.

Definicja 14.4. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią. Kategorię $\mathcal{C}$ nazywamy **kategorią konkretną**, jeżeli istnieje funkcja $\sigma : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{Set})$ taka, że

- (1) każdy morfizm $A \xrightarrow{f} B$ jest funkcją pomiędzy zbiorami $f : \sigma(A) \rightarrow \sigma(B)$;
- (2) morfizm identycznościowy $A \xrightarrow{1_A} A$ jest funkcją identycznościową $1_A : \sigma(A) \rightarrow \sigma(A)$;
- (3) składanie morfizmów jest składaniem funkcji.

Jako że o funkcji σ możemy myśleć jako o utożsamieniu obiektów kategorii z odpowiadającymi im zbiorami, powyższa definicja oznacza po prostu, że kategoria konkretna jest kategorią, w której obiekty są zbiorami, a morfizmy funkcjami.

Przykłady:

- (26) Kategorie $\mathcal{Set}$, $\mathcal{Ab}$, $\mathcal{Grp}$, $R - \mathcal{Mod}$ są konkretne.
- (27) Grupa G postrzegana jako kategoria z jednym obiektem nie jest konkretna.

Definicja 14.5. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią konkretną, niech F będzie obiektem kategorii $\mathcal{C}$, niech X będzie niepustym zbiorem, niech $f : X \rightarrow F$ będzie odwzorowaniem zbiorów. Obiekt F nazywamy **wolnym o bazie X** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego obiektu H i dowolnej funkcji zbiorów $h : X \rightarrow H$ istnieje dokładnie jeden morfizm $F \xrightarrow{\phi} H$ taki, że $\phi \circ f = h$.

Przykłady:

- (28) Obiekty wolne istnieją w kategorii $\mathcal{Grp}$, są nimi grupy wolne.
- (29) Obiekty wolne istnieją w kategorii $\mathcal{Ab}$, są nimi grupy abelowe.
- (30) Obiekty wolne istnieją w kategorii modułów unitarnych nad pierścieniami z jedyneką, są nimi moduły wolne.

Definicja 14.6. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią. Obiekt I kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy **obiektem początkowym** (lub **uniwersalnym**), jeżeli dla każdego obiektu C kategorii $\mathcal{C}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $I \xrightarrow{i} C$.

Obiekt T kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy **obiektem końcowym** (lub **kouniwersalnym**), jeżeli dla każdego obiektu C kategorii $\mathcal{C}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $C \xrightarrow{t} T$.

Obiekt Z kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy **obiektem zerowym**, jeżeli jest równocześnie obiektem początkowym i końcowym.

Przykłady:

- (31) Rozważmy kategorię $\mathcal{Grp}$. Obiektem początkowym i jednocześnie końcowym jest grupa trywialna $\{1\}$.
- (32) Rozważmy kategorię $\mathcal{Ab}$. Obiektem początkowym i jednocześnie końcowym jest grupa trywialna $\{1\}$.
- (33) Rozważmy kategorię $\mathcal{R} - \mathcal{Mod}$. Obiektem początkowym i jednocześnie końcowym jest moduł trywialny $\{0\}$.

Uwaga 14.1. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie rodziną obiektów kategorii $\mathcal{C}$. Niech $\mathcal{D}$ będzie kategorią, której obiektami są pary $(B, \{f_i : i \in I\})$, gdzie $B \xrightarrow{f_i} A_i$ są morfizmami w kategorii $\mathcal{C}$, $i \in I$, zaś morfizmy z klasy $\text{Hom}((B, \{f_i : i \in I\}), (C, \{g_i : i \in I\}))$ zdefiniowane są jako morfizmy $B \xrightarrow{h} C$ z kategorii $\mathcal{C}$ takie, że

$$g_i \circ h = f_i.$$

Wówczas produkt $\prod_{i \in I} A_i$ istnieje w kategorii $\mathcal{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje obiekt końcowy $(\prod_{i \in I} A_i, \{\pi_i : i \in I\})$ w kategorii $\mathcal{D}$.

Prosty dowód powyższej uwagi pozostawiamy jako ćwiczenie Czytelnikowi.

Uwaga 14.2. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie rodziną obiektów kategorii $\mathcal{C}$. Niech $\mathcal{D}$ będzie kategorią, której obiektami są pary $(B, \{f_i : i \in I\})$, gdzie $A_i \xrightarrow{f_i} B$ są morfizmami w kategorii $\mathcal{C}$, $i \in I$, zaś morfizmy z klasy $\text{Hom}((B, \{f_i : i \in I\}), (C, \{g_i : i \in I\}))$ zdefiniowane są jako morfizmy $B \xrightarrow{h} C$ z kategorii $\mathcal{C}$ takie, że

$$h \circ f_i = g_i.$$

Wówczas koprodukt $\coprod_{i \in I} A_i$ istnieje w kategorii $\mathcal{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje obiekt początkowy $(\coprod_{i \in I} A_i, \{\iota_i : i \in I\})$ w kategorii $\mathcal{D}$.

Prosty dowód powyższej uwagi pozostawiamy jako ćwiczenie Czytelnikowi.

Uwaga 14.3. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią konkretną, niech F będzie obiektem kategorii $\mathcal{C}$, niech X będzie niepustym zbiorem, niech $f : X \rightarrow F$ będzie odwzorowaniem zbiorów. Niech $\mathcal{D}$ będzie kategorią, której obiektami są pary (B, g) , gdzie $g : X \rightarrow B$ są funkcjami między zbiorami, zaś morfizmy z klasy $\text{Hom}((B, g), (C, h))$ zdefiniowane są jako morfizmy $B \xrightarrow{\phi} C$ z kategorii $\mathcal{C}$ takie, że

$$\phi \circ g = h.$$

Wówczas F jest obiektem wolnym w kategorii $\mathcal{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje obiekt początkowy (F, f) w kategorii $\mathcal{D}$.

Prosty dowód powyższej uwagi pozostawiamy jako ćwiczenie Czytelnikowi.

Definicja 14.7. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $B, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Morfizm $B \xrightarrow{\phi} C$ nazywamy **monomorfizmem kategorijskim** (lub **monikiem**), jeśli dla dowolnych obiektu A i morfizmów $A \xrightarrow[\psi_2]{\psi_1} B$:

$$\text{jeśli } \phi \circ \psi_1 = \phi \circ \psi_2 \text{ to } \psi_1 = \psi_2.$$

Morfizm $B \xrightarrow{\phi} C$ nazywamy **epimorfizmem kategorijskim** (lub **epikiem**), jeśli dla dowolnych obiektu D i morfizmów $C \xrightarrow[\psi_2]{\psi_1} D$:

$$\text{jeśli } \psi_1 \circ \phi = \psi_2 \circ \phi \text{ to } \psi_1 = \psi_2.$$

Przykłady:

- (34) Rozważmy kategorię $\mathcal{Grp}$. Wówczas morfizm $B \xrightarrow{\phi} C$ jest monomorfizmem kategorijskim wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnowartościowym homomorfizmem oraz jest epimorfizmem kategorijskim wtedy i tylko wtedy, gdy jest surjektywnym homomorfizmem.
- (35) Rozważmy kategorię $\mathcal{Rng}$. Wówczas morfizm $B \xrightarrow{\phi} C$ jest monomorfizmem kategorijskim wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnowartościowym homomorfizmem.
- (36) Rozważmy kategorię $R - \mathcal{Mod}$. Wówczas morfizm $B \xrightarrow{\phi} C$ jest monomorfizmem kategorijskim wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnowartościowym homomorfizmem oraz jest epimorfizmem kategorijskim wtedy i tylko wtedy, gdy jest surjektywnym homomorfizmem.

Uwaga 14.4. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $B, C, D \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, niech $B \xrightarrow{\phi} C$ i $C \xrightarrow{\psi} D$ będą morfizmami. Wówczas:

- (1) jeśli ϕ i ψ są monomorfizmami kategorijskimi, to $\psi \circ \phi$ jest monomorfizmem kategorijskim;
- (2) jeśli $\psi \circ \phi$ jest monomorfizmem kategorijskim, to ϕ jest monomorfizmem kategorijskim;
- (3) jeśli ϕ i ψ są epimorfizmami kategorijskimi, to $\psi \circ \phi$ jest epimorfizmem kategorijskim;
- (4) jeśli $\psi \circ \phi$ jest epimorfizmem kategorijskim, to ψ jest epimorfizmem kategorijskim;
- (5) jeśli ϕ jest izomorfizmem, to jest monomorfizmem kategorijskim i epimorfizmem kategorijskim.

Prosty dowód powyższej uwagi pozostawiamy jako ćwiczenie Czytelnikowi.

Uwaga 14.5. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, niech 0 będzie obiektem zerowym. Wówczas:

- (1) jednoznacznie wyznaczony morfizm $0 \rightarrow C$ jest monomorfizmem kategorijskim;
- (2) jednoznacznie wyznaczony morfizm $C \rightarrow 0$ jest epimorfizmem kategorijskim.

Prosty dowód powyższej uwagi pozostawiamy jako ćwiczenie Czytelnikowi.

Definicja i uwaga 14.1. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech 0 będzie obiektem zerowym. Wówczas dla każdej pary obiektów $C, D \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ istnieje dokładnie jeden morfizm $C \xrightarrow{0_{C,D}} D$ taki, że

$$f \circ 0_{C,D} = 0_{C,E} \text{ oraz } 0_{C,D} \circ g = 0_{B,D},$$

dla dowolnych morfizmów $h \in \text{Hom}(D, E)$ oraz $g \in \text{Hom}(B, C)$. Morfizm $0_{C,D}$ nazywamy **morfizmem zerowym**.

Prosty dowód powyższej uwagi pozostawiamy jako ćwiczenie Czytelnikowi.

Definicja 14.8. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $C, D \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, niech $C \xrightarrow[f]{f} D$ będą morfizmami. **Ekwalizatorem** (lub **jądrem różnicy**) pary f, g nazywamy parę (E, e) złożoną z obiektu E i morfizmu $E \xrightarrow{e} C$ takich, że

- (1) $f \circ e = g \circ e$;
- (2) jeśli A jest dowolnym obiektem, a $A \xrightarrow{h} C$ jest morfizmem takim, że

$$f \circ h = g \circ h,$$

to wówczas istnieje dokładnie jeden morfizm $A \xrightarrow{\bar{h}} E$ taki, że

$$e \circ \bar{h} = h.$$

Innymi słowy diagram

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & C & \xrightleftharpoons[g]{f} & D \\ \uparrow \bar{h} & \nearrow h & & & \\ A & & & & \end{array}$$

jest przemienny.

Koekwalizatorem (lub **kojądrem różnicy**) pary f, g nazywamy parę (Q, q) złożoną z obiektu E i morfizmu $D \xrightarrow{q} Q$ takich, że

- (1) $q \circ f = q \circ g$;
- (2) jeśli F jest dowolnym obiektem, a $D \xrightarrow{k} F$ jest morfizmem takim, że

$$k \circ f = k \circ g,$$

to wówczas istnieje dokładnie jeden morfizm $Q \xrightarrow{\bar{k}} F$ taki, że

$$\bar{k} \circ q = k.$$

Innymi słowy diagram

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightleftharpoons[g]{f} & D & \xrightarrow{q} & Q \\ & & \searrow k & & \downarrow \bar{k} \\ & & & & F \end{array}$$

jest przemienny.

Przykłady:

- (37) Rozważmy kategorię $\mathcal{Set}$. Niech $C, D \in \text{Ob}(\mathcal{Set})$, niech $C \xrightleftharpoons[g]{f} D$ będą morfizmami. Zdefiniujemy

$$E = \{c \in C : f(c) = g(c)\}$$

oraz $E \xrightarrow{e} C$ niech będzie inkluzją. Wówczas (E, e) jest ekwalizatorem pary f, g .

- (38) Rozważmy kategorię $\mathcal{Grp}$. Niech $C, D \in \text{Ob}(\mathcal{Grp})$, niech $C \xrightleftharpoons[g]{f} D$ będą morfizmami. Zdefiniujemy

$$E = \{c \in C : f(c) = g(c)\}$$

oraz $E \xrightarrow{e} C$ niech będzie inkluzją. Wówczas (E, e) jest ekwalizatorem pary f, g .

- (39) Rozważmy kategorię $\mathcal{Rng}$. Niech $C, D \in \text{Ob}(\mathcal{Rng})$, niech $C \xrightleftharpoons[g]{f} D$ będą morfizmami. Zdefiniujemy

$$E = \{c \in C : f(c) = g(c)\}$$

oraz $E \xrightarrow{e} C$ niech będzie inkluzją. Wówczas (E, e) jest ekwalizatorem pary f, g .

- (40) Rozważmy kategorię $R - \mathcal{Mod}$. Niech $C, D \in \text{Ob}(R - \mathcal{Mod})$, niech $C \xrightleftharpoons[g]{f} D$ będą morfizmami. Zdefiniujemy

$$E = \{c \in C : f(c) = g(c)\}$$

oraz $E \xrightarrow{e} C$ niech będzie inkluzją. Wówczas (E, e) jest ekwalizatorem pary f, g .

(41) Rozważmy kategorię $\mathcal{G}rp$. Niech $C, D \in Ob(\mathcal{S}et)$, niech $C \xrightarrow[f]{f} D$ będą morfizmami. Zdefiniujemy

$$Q' = \text{najmniejsza podgrupa normalna grupy } D \text{ zawierająca } \{f(c)g(c)^{-1} : c \in C\}$$

oraz $D \xrightarrow{q} D/Q' = Q$ niech będzie epimorfizmem kanonicznym. Wówczas (Q, q) jest koekwalizatorem pary f, g .

Uwaga 14.6. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $C, D \in Ob(\mathcal{C})$, niech $C \xrightarrow[g]{f} D$ będą morfizmami, niech (E, e) będzie ekwalizatorem, a (Q, q) koekwalizatorem pary f, g . Wówczas:

- (1) e jest monomorfizmem kategorijskim;
- (2) q jest epimorfizmem kategorijskim.

Prosty dowód powyższej uwagi pozostawiamy jako ćwiczenie Czytelnikowi.

Definicja 14.9. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech 0 będzie obiektem zerowym, niech $C, D \in Ob(\mathcal{C})$, niech $C \xrightarrow{f} D$ będzie morfizmem. **Jądrem** morfizmu f nazywamy ekwalizator (E, e) pary $f, 0_{C,D}$. Ekwalizator (E, e) oznaczamy wówczas $(\text{Ker } f, \ker f)$.

Kojądrem morfizmu f nazywamy koekwalizator (Q, q) pary $f, 0_{C,D}$. Koekwalizator (Q, q) oznaczamy wówczas $(\text{Coker } f, \text{coker } f)$.

Wniosek 14.1. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech 0 będzie obiektem zerowym, niech $C, D \in Ob(\mathcal{C})$, niech $C \xrightarrow{f} D$ będzie morfizmem. Wówczas:

- (1) $\ker f$ jest monomorfizmem oraz $f \circ \ker f = 0_{\text{Ker } f, D}$;
- (2) $\text{coker } f$ jest epimorfizmem oraz $\text{coker } f \circ f = 0_{C, \text{Coker } f}$.

Prosty dowód powyższego wniosku pozostawiamy jako ćwiczenie Czytelnikowi.

Przykłady:

(42) Rozważmy kategorię $\mathcal{G}rp$. Niech $C, D \in Ob(\mathcal{G}rp)$, niech $C \xrightarrow{f} D$ będzie morfizmem. Jądrem f jest para $(\text{Ker } f, \ker f)$, gdzie

$$\text{Ker } f = \{c \in C : f(c) = 0\}$$

oraz $\text{Ker } f \xrightarrow{\ker f} C$ jest inkluzją.

(43) Rozważmy kategorię $\mathcal{G}rp$. Niech $C, D \in Ob(\mathcal{G}rp)$, niech $C \xrightarrow{f} D$ będzie morfizmem. Kojądrem f jest para $(\text{Coker } f, \text{coker } f)$, gdzie

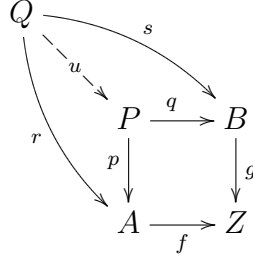
$$\text{Coker } f = D/\text{Im } f$$

oraz $D \xrightarrow{\text{coker } f} \text{Coker } f$ jest epimorfizmem kanonicznym.

Definicja 14.10. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią, niech $A, B, Z \in Ob(\mathcal{C})$.

- (1) Niech $A \xrightarrow{f} Z$ oraz $B \xrightarrow{g} Z$ będą morfizmami. **Pulbakiem** (lub **produktem włóknistym** albo **kwadratem kartezjańskim**) pary f, g nazywamy trójkę (P, p, q) złożoną z obiektu P oraz morfizmów $P \xrightarrow{p} A$ oraz $P \xrightarrow{q} B$ takich, że:
 - (a) $f \circ p = g \circ q$;

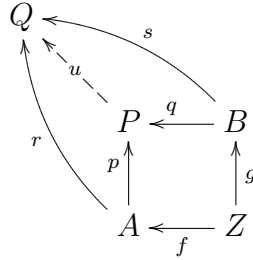
- (b) dla dowolnego obiektu Q wraz z morfizmami $Q \xrightarrow{r} A$ oraz $Q \xrightarrow{s} B$ takimi, że $f \circ r = g \circ s$, istnieje dokładnie jeden morfizm $Q \xrightarrow{u} P$ taki, że $r = p \circ u$ oraz $s = q \circ u$; innymi słowy następujący diagram:



jest przemienny. Obiekt P oznaczamy przez $A \times_Z B$, o morfizmie p mówimy, że jest **pulbakiem** g wzdłuż f , a o morfizmie q , że jest **pulbakiem** f wzdłuż g .

- (2) Niech $Z \xrightarrow{f} A$ oraz $Z \xrightarrow{g} B$ będą morfizmami. **Puszautelem** (lub **koproduktem włóknistym** albo **kwadratem kokartezjańskim**) pary f, g nazywamy trójkę (P, p, q) złożoną z obiektu P oraz morfizmów $A \xrightarrow{p} P$ oraz $B \xrightarrow{q} P$ takich, że:

- (a) $p \circ f = q \circ g$;
 (b) dla dowolnego obiektu Q wraz z morfizmami $A \xrightarrow{r} Q$ oraz $B \xrightarrow{s} Q$ takimi, że $r \circ f = s \circ g$, istnieje dokładnie jeden morfizm $P \xrightarrow{u} Q$ taki, że $r = u \circ p$ oraz $s = u \circ q$; innymi słowy następujący diagram:



jest przemienny. Obiekt P oznaczamy przez $A \cup_Z B$, o morfizmie p mówimy, że jest **puszautelem** g wzdłuż f , a o morfizmie q , że jest **puszautelem** f wzdłuż g .

Uwaga 14.7. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią. Wówczas w kategorii $\mathcal{C}$ istnieją produkty binarne i ekwalizatory wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją w niej pulbaki.

Dowód. ($\Rightarrow$): Załóżmy, że w kategorii $\mathcal{C}$ istnieją produkty dwóch elementów oraz ekwalizatory. Ustalmy $A, B, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ wraz z morfizmami $A \xrightarrow{f} Z$ oraz $B \xrightarrow{g} Z$ i rozważmy produkt $A \times B$ obiektów A i B wraz z rzutowaniami kanonicznymi $A \times B \xrightarrow{\pi_1} A$ oraz $A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$. Rozważmy diagram

$$A \times B \xrightarrow[f \circ \pi_1]{g \circ \pi_2} Z.$$

Niech (P, e) będzie ekwalizatorem pary $f \circ \pi_1$ i $g \circ \pi_2$:

$$P \xrightarrow{e} A \times B \xrightarrow[f \circ \pi_1]{g \circ \pi_2} Z.$$

Wówczas $(P, \pi_1 \circ e, \pi_2 \circ e)$ jest pulbakiem pary f, g . Istotnie, oczywiście $f \circ \pi_1 \circ e = g \circ \pi_2 \circ e$. Ustalmy obiekt Q wraz z morfizmami $Q \xrightarrow{r} A$ oraz $Q \xrightarrow{s} B$ takimi, że $f \circ r = g \circ s$. Wobec własności uniwersalnej

produktu istnieje dokładnie jeden morfizm $Q \xrightarrow{\phi} A \times B$ taki, że

$$\pi_1 \circ \phi = r \text{ oraz } \pi_2 \circ \phi = s.$$

Wobec własności uniwersalnej ekwalizatora istnieje dokładnie jeden morfizm $Q \xrightarrow{\bar{\phi}} P$ taki, że diagram

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{e} & A \times B \xrightarrow[f \circ \pi_1]{g \circ \pi_2} Z \\ \bar{\phi} \uparrow & \nearrow \phi & \\ Q & & \end{array}$$

jest przemienny. Wobec tego diagram

$$\begin{array}{ccccc} Q & & & & \\ & \searrow \bar{\phi} & & \searrow s & \\ & P & \xrightarrow{\pi_2 \circ e} & B & \\ & \downarrow \pi_1 \circ e & & \downarrow g & \\ & A & \xrightarrow{f} & Z & \end{array}$$

r (curved arrow from Q to A)

również jest przemienny.

($\Leftarrow$): ćwiczenie. □

Uwaga 14.8. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią. Wówczas w kategorii $\mathcal{C}$ istnieją koprodukty binarne i koekwalizatory wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją w niej puszauty.

Prosty dowód powyższej uwagi pozostawiamy jako ćwiczenie Czytelnikowi.

Przykłady:

- (44) Rozważmy kategorię $\mathbf{Set}$. Niech $A, B, Z \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Grp})$, niech $A \xrightarrow{f} Z$ oraz $B \xrightarrow{g} Z$ będą morfizmami. Pulbakiem pary f, g jest zbiór:

$$A \times_Z B = \{(a, b) \in A \times B : f(a) = g(b)\}$$

wraz z morfizmami $A \times_Z B \xrightarrow{p} A$ i $A \times_Z B \xrightarrow{q} B$ będącymi zwięzieniem kanonicznych rzutowań do zbioru $A \times_Z B$.