

13. WYKŁAD 13: FUNKTOR Hom I DUALIZACJA.

Uwaga 13.1. Niech R będzie pierścieniem, M, N lewymi R -modułami. W zbiorze $\text{Hom}_R(M, N)$ wszystkich homomorfizmów z modułu M do N zdefiniujemy działanie dodawania wzorem

$$(f + g)(m) = f(m) + g(m), m \in M,$$

dla danych homomorfizmów $f, g : M \rightarrow N$ oraz wyróżnimy homomorfizm $0 : M \rightarrow N$ dany wzorem

$$0(m) = 0, m \in M,$$

jako element neutralny działania $+$. Wówczas $(\text{Hom}_R(M, N), +)$ jest grupą przemenną. Ponadto działanie $+$ jest rozdzielne względem składania homomorfizmów, to znaczy dla dowolnych lewych R -modułów M', N' oraz dla homomorfizmów $f, g : M \rightarrow N$, $h : N \rightarrow N'$ oraz $k : M' \rightarrow M$ zachodzi:

$$h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g \text{ oraz } (f + g) \circ k = f \circ k + g \circ k.$$

Definicja i uwaga 13.1. Niech R będzie pierścieniem, M, M', N, N' lewymi R -modułami. Niech $f : M' \rightarrow M$ oraz $g : N \rightarrow N'$ będą homomorfizmami modułów. Wówczas odwzorowanie $\theta : \text{Hom}_R(M, N) \rightarrow \text{Hom}_R(M', N')$ dane wzorem

$$\theta(\phi) = g \circ \phi \circ f$$

jest homomorfizmem grup abelowych. Odwzorowanie θ nazywamy **odwzorowaniem indukowanym przez homomorfizmy f i g** i oznaczamy $\text{Hom}_R(f, g)$.

Jeżeli $N = N'$ i $g = \text{id}_N$, odwzorowanie $\text{Hom}_R(f, \text{id}_N) : \text{Hom}_R(M, N) \rightarrow \text{Hom}_R(M', N)$ oznaczamy przez $\bar{f}$.

Jeżeli $M = M'$ i $f = \text{id}_M$, odwzorowanie $\text{Hom}_R(\text{id}_M, g) : \text{Hom}_R(M, N) \rightarrow \text{Hom}_R(M, N')$ oznaczamy przez $\bar{g}$.

Twierdzenie 13.1. Niech R będzie pierścieniem.

(1) Ciąg lewych R -modułów i homomorfizmów

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$$

jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego lewego R -modułu N ciąg:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M_3, N) \xrightarrow{\bar{g}} \text{Hom}_R(M_2, N) \xrightarrow{\bar{f}} \text{Hom}_R(M_1, N)$$

jest ciągiem dokładnym grup abelowych, gdzie odwzorowania $\bar{g} : \text{Hom}_R(M_3, N) \rightarrow \text{Hom}_R(M_2, N)$ i $\bar{f} : \text{Hom}_R(M_2, N) \rightarrow \text{Hom}_R(M_1, N)$ dane są wzorami

$$\bar{g}(\phi) = \phi \circ g \text{ oraz } \bar{f}(\psi) = \psi \circ f.$$

(2) Ciąg lewych R -modułów i homomorfizmów

$$0 \rightarrow N_1 \xrightarrow{f} N_2 \xrightarrow{g} N_3$$

jest dokładny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego lewego R -modułu M ciąg:

$$\text{Hom}_R(M, N_1) \xrightarrow{\bar{f}} \text{Hom}_R(M, N_2) \xrightarrow{\bar{g}} \text{Hom}_R(M, N_3) \rightarrow 0$$

jest ciągiem dokładnym grup abelowych, gdzie odwzorowania $\bar{f} : \text{Hom}_R(M, N_1) \rightarrow \text{Hom}_R(M, N_2)$ i $\bar{g} : \text{Hom}_R(M, N_2) \rightarrow \text{Hom}_R(M, N_3)$ dane są wzorami

$$\bar{f}(\phi) = f \circ \phi \text{ oraz } \bar{g}(\psi) = g \circ \psi.$$

Dowód. (1) ($\Rightarrow$): Jeżeli ciąg $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$ jest dokładny, to g jest surjektywny oraz $\text{im } f = \ker g$. Ustalmy lewy R -moduł N .

Pokażemy, że $\bar{g}$ jest różnowartościowy. Załóżmy, że dla pewnych $\phi_1, \phi_2 \in \text{Hom}_R(M_3, N)$ zachodzi $\bar{g}(\phi_1) = \bar{g}(\phi_2)$. Wówczas

$$\phi_1 \circ g = \phi_2 \circ g.$$

Ponieważ g jest surjektywny, a więc jest epimorfizmem kategoriowym, więc $\phi_1 = \phi_2$.

Pokażemy, że $\text{im } \bar{g} = \ker \bar{f}$. Dla dowodu inkluzji ($\subset$) ustalmy $\psi \in \text{im } \bar{g}$. Wówczas $\psi = \bar{g}(\phi) = \phi \circ g$ dla pewnego $\phi \in \text{Hom}_R(M_3, N)$. Wówczas $\bar{f}(\psi)(m_1) = \bar{f}(\phi \circ g)(m_1) = \phi \circ g \circ f(m_1) = \phi(0) = 0$, dla dowolnego $m_1 \in M_1$, zatem $\psi \in \ker \bar{f}$.

Dla dowodu inkluzji ($\supset$) ustalmy $\psi \in \ker \bar{f}$. Wówczas $\psi : M_2 \rightarrow N$ jest takim homomorfizmem, że $\bar{f}(\psi) = \psi \circ f = 0$. Zatem $\psi(m_2) = 0$ dla $m_2 \in \text{im } f$, więc $\text{im } f \subset \ker \psi$. Wobec Wniosku 7.3 istnieje dokładnie jeden homomorfizm $u : M_2/\text{im } f \rightarrow N$ taki, że $\psi = u \circ \kappa$, gdzie $\kappa : M_2 \rightarrow M_2/\text{im } f$ jest homomorfizmem kanonicznym:

$$\begin{array}{ccc} & M_2 & \\ \kappa \swarrow & & \searrow \psi \\ M_2/\text{im } f & \xrightarrow{\quad u \quad} & N \end{array}$$

Podobnie, ponieważ $g : M_2 \rightarrow M_3$ jest surjekcją oraz $\ker g = \text{im } f$, więc jedyny homomorfizm $v : M_2/\ker g = M_2/\text{im } f \rightarrow M_3$ taki, że $g = v \circ \kappa$ jest izomorfizmem:

$$\begin{array}{ccc} & M_2 & \\ \kappa \swarrow & & \searrow g \\ M_2/\text{im } f & \xrightarrow{\quad v \quad} & M_3 \end{array}$$

W szczególności v jest odwracalny, więc $\kappa = v^{-1} \circ g$. Stąd $\psi = u \circ \kappa = u \circ v^{-1} \circ g = \bar{g}(u \circ v^{-1}) \in \text{im } \bar{g}$.

($\Leftarrow$): Jeżeli $0 \rightarrow \text{Hom}_R(M_3, N) \xrightarrow{\bar{g}} \text{Hom}_R(M_2, N) \xrightarrow{\bar{f}} \text{Hom}_R(M_1, N)$ jest ciągiem dokładnym grup abelowych dla wszystkich N , to $\bar{g}$ jest różnowartościowy oraz $\text{im } \bar{g} = \ker \bar{f}$.

Pokażemy, że g jest surjektywny. Ponieważ $\bar{g}$ jest różnowartościowy, więc jeśli $\phi_1, \phi_2 \in \text{Hom}_R(M_2, N)$ są takimi homomorfizmami, że $\phi_1 \circ g = \phi_2 \circ g$, to $\phi_1 = \phi_2$. Zatem g jest epimorfizmem kategoriowym, a więc surjekcją.

Pokażemy, że $\text{im } f = \ker g$. Dla dowodu inkluzji ($\subset$) weźmy w założeniu $N = M_3$. Ponieważ $\text{im } \bar{g} = \ker \bar{f}$, więc dla $\phi \in \text{Hom}_R(M_3, M_3)$ zachodzi $\bar{f}(\bar{g}(\phi)) = 0$, czyli $\phi \circ g \circ f = 0$. W szczególności $\text{id}_G \circ g \circ f = g \circ f = 0$, więc $\text{im } f \subset \ker g$.

Dla dowodu inkluzji ($\supset$) weźmy w założeniu $N = M_2/\text{im } f$ i niech $\kappa : M_2 \rightarrow M_2/\text{im } f$ będzie epimorfizmem kanonicznym. Wówczas $\bar{f}(\kappa)(m_2) = (\kappa \circ f)(m_2) = f(m_2) + \text{im } f = \text{im } f$, więc $\kappa \in \ker \bar{f} = \text{im } \bar{g}$. Zatem dla pewnego $\phi \in \text{Hom}_R(M_3, M_2/\text{im } f)$ zachodzi $\kappa = \phi \circ g$. Stąd $\text{im } f = \ker \kappa \supset \ker g$.

(2) analogicznie.

□

W świetle powyższego twierdzenia mówimy czasem, że moduł $\text{Hom}_R(M, N)$ jest **lewostronnie dokładny**. Okazuje się jednak, że nie jest prawdą, jakoby ciąg dokładny

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$$

indukował dokładność ciągów

$$0 \rightarrow \operatorname{Hom}_R(N, M_1) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(N, M_2) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(N, M_3) \rightarrow 0$$

oraz

$$0 \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M_1, N) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M_2, N) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M_3, N) \rightarrow 0.$$

Omówimy teraz pokrótce to zagadnienie.

Przykład:

(1) Rozważmy ciąg dokładny

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\kappa} \mathbb{Z}_5 \rightarrow 0,$$

gdzie κ jest epimorfizmem kanonicznym. Wówczas ciąg

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\bar{\kappa}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_5) \rightarrow 0$$

nie jest dokładny.

Twierdzenie 13.2. *Niech R będzie pierścieniem. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *ciąg lewych R -modułów i homomorfizmów*

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$$

jest rozszczepialnym ciągiem dokładnym;

(2) *dla każdego lewego R -modułu N ciąg:*

$$0 \rightarrow \operatorname{Hom}_R(N, M_1) \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{Hom}_R(N, M_2) \xrightarrow{\bar{g}} \operatorname{Hom}_R(N, M_3) \rightarrow 0$$

jest rozszczepialnym ciągiem dokładnym, gdzie odwzorowania $\bar{f} : \operatorname{Hom}_R(N, M_1) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(N, M_2)$ i $\bar{g} : \operatorname{Hom}_R(N, M_2) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(N, M_3)$ dane są wzorami

$$\bar{f}(\phi) = f \circ \phi \text{ oraz } \bar{g}(\psi) = g \circ \psi;$$

(3) *dla każdego lewego R -modułu N ciąg:*

$$0 \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M_3, N) \xrightarrow{\bar{g}} \operatorname{Hom}_R(M_2, N) \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{Hom}_R(M_1, N) \rightarrow 0$$

jest rozszczepialnym ciągiem dokładnym, gdzie odwzorowania $\bar{g} : \operatorname{Hom}_R(M_3, N) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M_2, N)$ i $\bar{f} : \operatorname{Hom}_R(M_2, N) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M_1, N)$ dane są wzorami

$$\bar{g}(\phi) = \phi \circ g \text{ oraz } \bar{f}(\psi) = \psi \circ f.$$

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (3): Wobec Twierdzenia 9.3 istnieje homomorfizm $\alpha : M_2 \rightarrow M_1$ taki, że $\alpha \circ f = id_{M_1}$. Dla ustalonego R -modułu N zdefiniujmy odwzorowanie $\bar{\alpha} : \operatorname{Hom}_R(M_1, N) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M_2, N)$ wzorem

$$\bar{\alpha}(\psi) = \psi \circ \alpha.$$

Wówczas $\bar{\alpha}$ jest homomorfizmem oraz $\bar{f} \circ \bar{\alpha}(\psi) = \bar{f}(\psi \circ \alpha) = \psi \circ \alpha \circ f = \psi$, a zatem wobec Twierdzeń 9.3 i 13.1 ciąg

$$0 \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M_3, N) \xrightarrow{\bar{g}} \operatorname{Hom}_R(M_2, N) \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{Hom}_R(M_1, N) \rightarrow 0$$

jest rozszczepialnym ciągiem dokładnym.

(3) $\Rightarrow$ (1): Niech $N = M_1$. Ponieważ ciąg

$$0 \rightarrow \operatorname{Hom}_R(M_3, M_1) \xrightarrow{\bar{g}} \operatorname{Hom}_R(M_2, M_1) \xrightarrow{\bar{f}} \operatorname{Hom}_R(M_1, M_1) \rightarrow 0$$

jest dokładny, więc $\bar{f}$ jest epimorfizmem i dla pewnego $\psi \in \text{Hom}_R(M_2, M_1)$ zachodzi

$$\bar{\psi} = \psi \circ f = \text{id}_{M_1}.$$

Zatem wobec Twierdzeń 9.3 i 13.1 ciąg

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$$

jest rozszczepialnym ciągiem dokładnym.

(1) $\Leftrightarrow$ (2): analogicznie. □

Wniosek 13.1. Niech R będzie pierścieniem, P lewym R -modułem. Następujące warunki są równoważne:

- (1) P jest projektywny;
 (2) jeśli M_2, M_3 są lewymi R -modułami, a $g : M_2 \rightarrow M_3$ jest epimorfizmem, to odwzorowanie $\bar{g} : \text{Hom}_R(P, M_2) \rightarrow \text{Hom}_R(P, M_3)$ dane wzorem

$$\bar{g}(\psi) = g \circ \psi$$

jest epimorfizmem;

- (3) jeśli ciąg lewych R -modułów i homomorfizmów

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$$

jest dokładny, to ciąg

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(P, M_1) \xrightarrow{\bar{f}} \text{Hom}_R(P, M_2) \xrightarrow{\bar{g}} \text{Hom}_R(P, M_3) \rightarrow 0$$

jest dokładny, gdzie odwzorowania $\bar{f} : \text{Hom}_R(P, M_1) \rightarrow \text{Hom}_R(P, M_2)$ i $\bar{g} : \text{Hom}_R(P, M_2) \rightarrow \text{Hom}_R(P, M_3)$ dane są wzorami

$$\bar{f}(\phi) = f \circ \phi \text{ oraz } \bar{g}(\psi) = g \circ \psi.$$

Dowód. (1) $\Leftrightarrow$ (2): Odwzorowanie $\bar{g} : \text{Hom}_R(P, M_2) \rightarrow \text{Hom}_R(P, M_3)$ dane wzorem

$$\bar{g}(\psi) = g \circ \psi$$

jest, w myśl definicji, epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego homomorfizmu $f : P \rightarrow M_3$ istnieje homomorfizm $h : P \rightarrow M_2$ taki, że

$$\bar{g}(h) = g \circ h = f,$$

to znaczy diagram

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow f & & \\ M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

w którym dolny wiersz jest dokładny, można uzupełnić do diagramu przemiennego.

(2) $\Rightarrow$ (3): Wynika z Twierdzenia 9.3.

(3) $\Rightarrow$ (2): Niech $g : M_2 \rightarrow M_3$ będzie epimorfizmem. Niech $M_1 = \ker g$. Wówczas ciąg

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{\text{id}} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$$

jest dokładny, a więc odwzorowanie $\bar{g} : \text{Hom}_R(P, M_2) \rightarrow \text{Hom}_R(P, M_3)$ dane wzorem

$$\bar{g}(\psi) = g \circ \psi$$

jest epimorfizmem. □

Wniosek 13.2. Niech R będzie pierścieniem, J lewym R -modułem. Następujące warunki są równoważne:

- (1) J jest iniektywny;
- (2) jeśli M_1, M_2 są lewymi R -modułami, a $f : M_1 \rightarrow M_2$ jest monomorfizmem, to odwzorowanie $\bar{f} : \text{Hom}_R(M_2, J) \rightarrow \text{Hom}_R(M_1, J)$ dane wzorem

$$\bar{f}(\phi) = \phi \circ f$$

jest monomorfizmem;

- (3) jeśli ciąg lewych R -modułów i homomorfizmów

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$$

jest dokładny, to ciąg

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M_3, J) \xrightarrow{\bar{g}} \text{Hom}_R(M_2, J) \xrightarrow{\bar{f}} \text{Hom}_R(M_1, J) \rightarrow 0$$

jest dokładny, gdzie odwzorowania $\bar{g} : \text{Hom}_R(M_3, J) \rightarrow \text{Hom}_R(M_2, J)$ i $\bar{f} : \text{Hom}_R(M_2, J) \rightarrow \text{Hom}_R(M_1, J)$ dane są wzorami

$$\bar{g}(\phi) = \phi \circ g \text{ oraz } \bar{f}(\psi) = \psi \circ f.$$

Dowód jest analogiczny do dowodu poprzedniego wniosku i pozostawiamy go czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Twierdzenie 13.3. Niech R będzie pierścieniem, niech $M, N, \{M_i : i \in I\}, \{N_j : j \in J\}$ będą lewymi R -modułami. Wówczas:

- (1) $\text{Hom}_R(\sum_{i \in I} M_i, N) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(M_i, N)$,
- (2) $\text{Hom}_R(M, \prod_{i \in I} N_i) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(M, N_i)$.

Dowód. (1) Niech dla $i \in I$ odwzorowanie $\iota_i : M_i \rightarrow \sum_{i \in I} M_i$ oznacza monomorfizm kanoniczny. Wobec własności uniwersalnej koproduktu modułów, dla ustalonego $g \in \sum_{i \in I} \text{Hom}_R(M_i, N)$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\tilde{g} : \sum_{i \in I} M_i \rightarrow N$ taki, że

$$\tilde{g} \circ \iota_i = g(i), i \in I.$$

Wówczas odwzorowanie $\psi : \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(M_i, N) \rightarrow \text{Hom}_R(\sum_{i \in I} M_i, N)$ dane wzorem

$$\psi(g) = \tilde{g}$$

jest dobrze określonym homomorfizmem. Ponadto odwzorowanie $\phi : \text{Hom}_R(\sum_{i \in I} M_i, N) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(M_i, N)$ dane wzorem

$$\phi(f) = \hat{f}, \text{ gdzie } \hat{f}(i) = f \circ \iota_i, i \in I$$

jest dobrze określonym homomorfizmem oraz

$$\phi \circ \psi = id_{\text{Hom}_R(\sum_{i \in I} M_i, N)} \text{ i } \psi \circ \phi = id_{\prod_{i \in I} \text{Hom}_R(M_i, N)}.$$

- (2) Analogicznie.

□

W celu zdefiniowania pojęcia dualności i badania dalszych własności modułów będziemy musieli szczegółowo omówić różne sposoby, w jakie można wyposażać grupę abelową $\text{Hom}_R(M, N)$ w strukturę modułu. Wygodnie jest zrobić to przy użyciu pojęcia bimodułu, które teraz wprowadzimy.

Definicja 13.1. Niech R i S będą pierścieniami. Grupę abelową M będziemy nazywać R – S -bimodułem, jeżeli jest jednocześnie lewym R -modułem, prawym S -modułem i spełniony jest warunek:

$$\forall m \in M \forall r \in R \forall s \in S [r(ms) = (rm)s].$$

Oznaczenie: Będziemy pisali ${}_R M_S$ dla oznaczenia, że M jest R – S -bimodułem. Analogicznie będziemy pisali ${}_R M$ dla oznaczenia, że M jest lewym R -modułem oraz M_S dla oznaczenia, że M jest prawym S -modułem.

Przykłady:

- (2) Rozważmy pierścień R . Wówczas R jest R – R -modułem.
- (3) Rozważmy lewy R -moduł M nad pierścieniem przemiennym. Wówczas M jest R – R -bimodułem, gdzie prawostronne mnożenie $\cdot : M \times R \rightarrow M$ określone jest wzorem

$$m \cdot r = rm, r \in R, m \in M.$$

Twierdzenie 13.4. Niech R i S będą pierścieniami, ${}_R M_1$ lewym R -modułem, ${}_R M_{2S}$ i ${}_R M_{3S}$ R – S -bimodułami, ${}_R M_4$ lewym R -modułem. Wówczas:

- (1) $\text{Hom}_R(M_1, M_2)_S$ jest prawym S -modułem, gdzie prawostronne mnożenie $\cdot : \text{Hom}_R(M_1, M_2) \times S \rightarrow \text{Hom}_R(M_1, M_2)$ określone jest wzorem:

$$(f \cdot s)(m_1) = f(m_1)s, m_1 \in M_1,$$

dla $f \in \text{Hom}_R(M_1, M_2)$, $s \in S$;

- (2) jeśli ${}_R N_1$ jest lewym R -modułem i $f : M_1 \rightarrow N_1$ jest homomorfizmem lewych R -modułów, to odwzorowanie $\bar{f} : \text{Hom}_R(N_1, M_2) \rightarrow \text{Hom}_R(M_1, M_2)$ dane wzorem

$$\bar{f}(\phi) = \phi \circ f$$

jest homomorfizmem prawych S -modułów;

- (3) ${}_S \text{Hom}_R(M_3, M_4)_S$ jest lewym S -modułem, gdzie lewostronne mnożenie $\cdot : S \times \text{Hom}_R(M_3, M_4) \rightarrow \text{Hom}_R(M_3, M_4)$ określone jest wzorem:

$$(s \cdot g)(m_3) = g(m_3s), m_3 \in M_3,$$

dla $s \in S$, $g \in \text{Hom}_R(M_3, M_4)$;

- (4) jeśli ${}_R N_4$ jest lewym R -modułem i $g : M_4 \rightarrow N_4$ jest homomorfizmem lewych R -modułów, to odwzorowanie $\bar{g} : \text{Hom}_R(M_3, M_4) \rightarrow \text{Hom}_R(M_3, N_4)$ dane wzorem

$$\bar{g}(\psi) = g \circ \psi$$

jest homomorfizmem lewych S -modułów.

Dowód. (1) Dowód pozostawiamy czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

- (2) Oczywiście $\bar{f}$ jest homomorfizmem grup abelowych. Ustalmy $\phi \in \text{Hom}_R(N_1, M_2)$ i $s \in S$. Wówczas dla $n_1 \in N_1$:

$$\bar{f}(\phi s)(n_1) = (\phi s) \circ f(n_1) = (\phi s)(f(n_1)) = \phi(f(n_1))s = \phi \circ f(n_1)s = \bar{f}(n_1)s.$$

- (3) Analogicznie.

- (4) Analogicznie.

□

Wniosek 13.3. Niech R będzie pierścieniem przemiennym, niech M_1, M_2 będą lewymi R -modułami. Wówczas $\text{Hom}_R(M_1, M_2)$ jest R – R -bimodułem.

Wniosek 13.4. *Niech R będzie pierścieniem z jedynką, niech M będzie lewym unitarnym R -modułem. Wówczas*

$${}_R M \cong {}_R \text{Hom}_R(R, M).$$

Dowód. Wobec Przykładu (2) R jest $R - R$ -bimodułem. Wobec tego $\text{Hom}_R(R, M)$ jest lewym R -modułem, gdzie lewostronne mnożenie $\cdot : R \times \text{Hom}_R(R, M) \rightarrow \text{Hom}_R(R, M)$ określone jest wzorem:

$$(r \cdot g)(a) = g(ar), a \in R,$$

dla $r \in R, g \in \text{Hom}_R(R, M)$. Zdefiniujmy odwzorowanie $\Phi : \text{Hom}_R(R, M) \rightarrow M$ wzorem

$$\Phi(\phi) = \phi(1_R).$$

Wówczas Φ jest homomorfizmem lewych R -modułów. Zdefiniujmy ponadto odwzorowanie $\Psi : M \rightarrow \text{Hom}_R(R, M)$ wzorem

$$\Psi(m) = \phi_m, \text{ gdzie } \phi_m(a) = am, a \in R.$$

Wówczas Ψ jest homomorfizmem lewych R -modułów i

$$\Phi \circ \Psi = id_R \text{ oraz } \Psi \circ \Phi = id_{\text{Hom}_R(R, M)}.$$

□

Definicja i uwaga 13.2. *Niech R będzie pierścieniem, niech M będzie lewym R -modułem. Wówczas, wobec Przykładu (2), M jest $R - R$ -bimodułem, a więc, wobec Twierdzenia 13.4 (1), $\text{Hom}_R(M, R)$ jest prawym R -modułem. Moduł ten nazywamy **modułem dualnym** do M i oznaczamy M^* .*

Analogicznie, niech N będzie prawym R -modułem. Wówczas $\text{Hom}_R(N, R)$ jest lewym R -modułem, który również nazywamy modułem dualnym i oznaczamy N^ .*

*Elementy modułu dualnego nazywamy **funkcjonałami liniowymi**.*

Definicja i uwaga 13.3. *Niech R będzie pierścieniem, niech M_1, M_2, M_3 będą lewymi R -modułami.*

- (1) *Jeżeli $f : M_1 \rightarrow M_3$ jest homomorfizmem lewych R -modułów, to odwzorowanie $\bar{f} : M_3^* = \text{Hom}_R(M_3, R) \rightarrow \text{Hom}_R(M_1, R) = M_1^*$ dane wzorem*

$$\bar{f}(\psi) = \psi \circ f$$

jest homomorfizmem prawych R -modułów.

- (2) $(M_1 \oplus M_2)^* \cong M_1^* \oplus M_2^*$.

- (3) *Jeżeli R jest pierścieniem z dzieleniem i ciąg lewych R -modułów i homomorfizmów*

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$$

jest dokładny, to ciąg prawych R -modułów i homomorfizmów

$$0 \rightarrow M_3 \xrightarrow{\bar{g}} M_2 \xrightarrow{\bar{f}} M_1 \rightarrow 0$$

jest dokładny.

Odwzorowanie $\bar{f}$ będziemy nazywać **odwzorowaniem dualnym**.

Prosty dowód pozostawiamy czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Twierdzenie 13.5. Niech R będzie pierścieniem z jedyneką, niech M będzie lewym R -modułem wolnym z bazą $\{f_i : i \in I\}$, niech, dla $i \in I$, odwzorowanie $f_i^* : M \rightarrow R$ będzie jednoznacznie wyznaczonym homomorfizmem określonym przez warunek

$$f_i^*(f_j) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = j \\ 0, & \text{gdy } i \neq j. \end{cases}$$

Wówczas:

- (1) $\{f_i^* : i \in I\}$ jest liniowo niezależnym podzbiorem zbioru M^* o mocy $|I|$;
- (2) jeżeli I jest zbiorem skończonym, to M^* jest prawym R -modułem wolnym o bazie $\{f_i^* : i \in I\}$.

Dowód. (1) Załóżmy, że dla pewnego podzbioru $I_0 = \{i_1, \dots, i_n\} \subset I$ i dla pewnych $r_1, \dots, r_n \in R$ zachodzi

$$f_{i_1}^* r_1 + f_{i_2}^* r_2 + \dots + f_{i_n}^* r_n = 0.$$

Wówczas dla każdego $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} 0 &= 0(f_j) = (f_{i_1}^* r_1 + f_{i_2}^* r_2 + \dots + f_{i_n}^* r_n)(f_j) \\ &= f_{i_1}^*(f_j) r_1 + f_{i_2}^*(f_j) r_2 + \dots + f_{i_n}^*(f_j) r_n \\ &= r_j, \end{aligned}$$

a zatem zbiór $\{f_i^* : i \in I\}$ jest liniowo niezależny. Jeżeli $i \neq j$, $i, j \in I$, to wówczas

$$f_i^*(f_i) = 1 \neq 0 = f_j^*(f_i),$$

a zatem $f_i^* \neq f_j^*$ i tym samym $|\{f_i^* : i \in I\}| = |I|$.

- (2) Załóżmy, że $I = \{i_1, \dots, i_n\}$. Ustalmy $f^* \in M^*$ i niech $s_i = f^*(f_i)$, $i \in \{i_1, \dots, i_n\}$. Ustalmy $m \in M$ i niech

$$m = r_1 f_{i_1} + r_2 f_{i_2} + \dots + r_n f_{i_n},$$

dla pewnych $r_1, \dots, r_n \in R$. Wówczas:

$$\begin{aligned} &(f_{i_1}^* s_1 + f_{i_2}^* s_2 + \dots + f_{i_n}^* s_n)(m) \\ &= (f_{i_1}^* r_1 + f_{i_2}^* r_2 + \dots + f_{i_n}^* r_n)(r_1 f_{i_1} + r_2 f_{i_2} + \dots + r_n f_{i_n}) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n r_k f_{i_j}^*(f_{i_k}) s_j = \sum_{k=1}^n r_k s_k \\ &= \sum_{k=1}^n r_k f^*(f_{i_k}) = f^*\left(\sum_{k=1}^n r_k f_{i_k}\right) = f^*(m) \end{aligned}$$

i tym samym zbiór $\{f_i^* : i \in I\}$ jest generujący, a więc tworzy bazę. □

Definicja i uwaga 13.4. Niech R będzie pierścieniem z jedyneką, niech M będzie lewym R -modułem wolnym z bazą skończoną $\{f_1, \dots, f_n\}$. Wówczas baza $\{f_1^*, \dots, f_n^*\}$ prawego R -modułu wolnego M^* określona w poprzednim twierdzeniu nazywana jest **bazą dualną**.

Definicja i uwaga 13.5. Niech R będzie pierścieniem, niech M będzie lewym R -modułem. Wówczas $\text{Hom}_R(M^*, R) = \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(M, R), R)$ jest lewym R -modułem, który nazywamy **podwójnie dualnym** i oznaczamy M^{**} .

Analogicznie, niech N będzie prawym R -modułem. Wówczas $\text{Hom}_R(N^*, R) = \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(N, R), R)$ jest prawym R -modułem, który również nazywamy podwójnie dualnym i oznaczamy N^{**} .

Twierdzenie 13.6. *Niech R będzie pierścieniem, niech M będzie lewym R -modułem.*

- (1) *Istnieje homomorfizm $\theta : M \rightarrow M^{**}$.*
- (2) *Jeżeli R jest pierścieniem z jedynką, a M lewym R -modułem wolnym, to θ jest monomorfizmem.*
- (3) *Jeżeli R jest pierścieniem z jedynką, a M lewym R -modułem wolnym o skończonej bazie, to θ jest izomorfizmem.*

Dowód. (1) Zdefiniujmy odwzorowanie $\theta : M \rightarrow M^{**}$ wzorem

$$\theta(m)(\phi) = \phi(m), m \in M.$$

Wówczas dla $r_1, r_2 \in R, m_1, m_2 \in M$:

$$\theta(r_1 m_1 + r_2 m_2)(\phi) = \phi(r_1 m_1 + r_2 m_2) = r_1 \phi(m_1) + r_2 \phi(m_2) = r_1 \theta(m_1)(\phi) + r_2 \theta(m_2)(\phi).$$

- (2) Niech $\{f_i : i \in I\}$ będzie bazą M . Pokażemy, że $\ker \theta = 0$.

Istotnie, ustalmy $m \in M$. Wówczas $m = \sum_{i \in I} r_i f_i$ i mamy

$$0 = \theta(m)(\phi) = \theta\left(\sum_{i \in I} r_i f_i\right)(\phi) = \sum_{i \in I} r_i \theta(f_i)(\phi) = \sum_{i \in I} r_i \phi(f_i).$$

W szczególności dla $\phi_i \in M^*$ będących jednoznacznie wyznaczonymi homomorfizmami określonym przez warunek

$$\phi_i(f_j) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = j \\ 0, & \text{gdy } i \neq j. \end{cases}$$

zachodzi

$$0 = \sum_{i \in I} r_i \phi_i(f_i) = r_i,$$

skąd $m = \sum_{i \in I} 0 f_i = 0$.

- (3) Niech $\{f_1, \dots, f_n\}$ będzie bazą M , niech $\{f_1^*, \dots, f_n^*\}$ będzie bazą dualną, niech $\{f_1^{**}, \dots, f_n^{**}\}$ będzie bazą dualną do bazy dualnej. Wówczas

$$\theta(f_i)(f_j^*) = f_j^*(f_i) = f_i^{**}(f_j^*),$$

skąd $f_i^{**} = \theta(f_i)$ i tym samym θ jest surjekcją.

□

Definicja 13.2. *Niech R będzie pierścieniem, niech M będzie lewym R -modułem. Jeżeli homomorfizm $\theta : M \rightarrow M^{**}$ z poprzedniego twierdzenia jest izomorfizmem, to moduł M nazywamy **refleksywnym**.*