

12. WYKŁAD 12: MODUŁY INJEKTYWNE.

Definicja 12.1. Niech R będzie pierścieniem, J lewym R -modułem. Jeżeli dla każdego R -modułu M i homomorfizmu $h : M \rightarrow J$ zachodzi następujący warunek: dla każdego lewego R -modułu N i dla każdego monomorfizmu $g : M \rightarrow N$ istnieje homomorfizm $f : N \rightarrow J$ taki, że $h = f \circ g$ (inaczej: diagram

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{g} & N \\ & & \downarrow h & \searrow f & \\ & & J & & \end{array}$$

w którym górny wiersz jest dokładny, jest przemienny), to moduł J nazywamy **modułem injektywnym**.

Twierdzenie 12.1. Niech R będzie pierścieniem, niech $\{J_i : i \in I\}$ będzie rodziną lewych R -modułów. Wówczas $\prod_{i \in I} J_i$ jest modułem injektywnym wtedy i tylko wtedy, gdy $J_i, i \in I$, są modułami injektywnymi.

Dowód jest bardzo podobny do dowodu analogicznego rezultatu dla modułów projektywnych i pozostawiamy go czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

Ponieważ pojęcia modułu wolnego nie da się dualizować, to znaczy nie istnieje coś takiego jak moduł kowolny, więc nie można udowodnić rezultatów dualnych do Wniosku 11.1 (to znaczy nie istnieje twierdzenie, orzekające że “każdy moduł kowolny jest modułem injektywnym”), ani do Uwagi 11.1 (to znaczy nie istnieje twierdzenie orzekające, że “moduł jest injektywny wtedy i tylko wtedy, gdy jest składnikiem prostym modułu kowolnego”). Okazuje się jednak, że można dualizować Uwangę 11.2, to znaczy można udowodnić twierdzenie orzekające, że “w każdy moduł można zanurzyć pewien moduł injektywny”, skąd z kolei wynika prosta dualizacja Twierdzenia 11.1 (1) i (2). Pozostałą część niniejszego wykładu poświęcimy dowodowi takiej dualizacji, ograniczając się wszakże do przypadku lewych R -modułów unitarnych nad pierścieniami z jedyneką.

Zacznijmy od następującej charakteryzacji unitarnych modułów injektywnych.

Twierdzenie 12.2 (lemat Baer’a). Niech R będzie pierścieniem z jedyneką, J lewym unitarnym R -modułem. Wówczas J jest injektywny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego lewostronnego ideału $I \triangleleft R$ wraz z kanonicznym zanurzeniem $w : I \hookrightarrow R$ i homomorfizmu $h : I \rightarrow J$ istnieje homomorfizm $f : R \rightarrow J$ taki, że

$$h = f \circ w.$$

Inaczej: diagram

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{w} & R \\ & & \downarrow h & \searrow f & \\ & & J & & \end{array}$$

jest przemienny.

Dowód. Implikacja $(\Rightarrow)$ wynika wprost z definicji modułu injektywnego, pozostaje więc udowodnić implikację $(\Leftarrow)$. Rozważmy diagram o dokładnym wierszu:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{g} & N \\ & & \downarrow h & \searrow f & \\ & & J & & \end{array}$$

Niech

$$\mathcal{S} = \{(N', f') : N' < N, \text{im } g \subset N', f' : N' \rightarrow J \text{ jest homomorfizmem takim, że } h = f' \circ g \upharpoonright_{g^{-1}(N')}\}$$

i zdefiniujemy w zbiorze $\mathcal{S}$ relację $<$ warunkiem

$$(N', f') < (N'', f'') \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } N' \subset N'' \wedge f' \upharpoonright_{N'} = f''.$$

Z łatwością sprawdzamy, że $\mathcal{S} \neq \emptyset$, $<$ jest relacją częściowego porządku oraz że każdy łańcuch w $\mathcal{S}$ ma ograniczenie górne. Tym samym, wobec lematu Kuratowskiego-Zorna, w $\mathcal{S}$ istnieje element maksymalny (N_0, f_0) .

Pokażemy, że $N_0 = N$. Na odwrót, przypuśćmy, że istnieje $n \in N$ taki, że $n \notin N_0$. Niech N_1 będzie podmodułem generowanym przez zbiór $N_0 \cup \{n\}$. Wówczas

$$N_1 = \{n_0 + rn : n_0 \in N_0, r \in R\}.$$

Niech ponadto $I = \{r \in R : rn \in N_0\}$. Bez trudu sprawdzamy, że I jest lewostronnym ideałem pierścienia R , zaś odwzorowanie $\alpha : I \rightarrow N_0$ dane wzorem $\alpha(r) = rn$ jest homomorfizmem. Rozważmy diagram

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{w} & R \\ & & \alpha \downarrow & \searrow f_0 \circ \alpha \upharpoonright_I & \downarrow f \\ & & N_0 & \xrightarrow{f_0} & J. \end{array}$$

Wobec założenia istnieje homomorfizm $f : R \rightarrow J$ taki, że $f \circ w = f_0 \circ \alpha$. Zdefiniujemy odwzorowanie $f_1 : N_1 \rightarrow J$ wzorem

$$f_1(n_0 + nr) = f_0(n_0) + rf(1).$$

Pokażemy, że f_1 jest dobrze zdefiniowane. Załóżmy bowiem, że $n_0 + nr = n'_0 + r'n$. Wówczas $(r - r')n = n'_0 - n_0 \in N_0$, więc $r - r' \in I$. Stąd $f_0(n'_0 - n_0) = f_0((r - r')n) = f_0 \circ \alpha(r - r') = f(r - r') = (r - r')f(1)$, więc $f_0(n_0) + rf(1) = f_0(n'_0) + r'f(1)$.

Równie prosto sprawdzamy, że f_1 jest homomorfizmem. Tym samym $(N_1, f_1) \in \mathcal{S}$ oraz $(N_0, f_0) \leq (N_1, f_1)$, co daje sprzeczność. $\square$

Wniosek 12.1. Niech R będzie pierścieniem z jedyneką, J lewym unitarnym R -modułem. Wówczas J jest injektywny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego lewostronnego ideału $I \triangleleft R$ i homomorfizmu $h : I \rightarrow J$ istnieje element $j \in J$ taki, że

$$h(r) = rj, \text{ dla } r \in R.$$

Dowód. ($\Rightarrow$): Ustalmy lewostronny ideał $I \triangleleft R$ wraz z włożeniem $w : I \hookrightarrow R$ i rozważmy diagram:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{w} & R \\ & & h \downarrow & \searrow f & \\ & & J & & \end{array}$$

W szczególności, dla ustalonego $r \in I$:

$$h(r) = f \circ w(r) = f(w(r)) = f(r) = r \cdot f(1_R)$$

i możemy przyjąć $j = f(1_R)$.

($\Leftarrow$): Ustalmy lewostronny ideał $I \triangleleft R$ wraz z włożeniem $w : I \hookrightarrow R$ i rozważmy diagram:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{w} & R \\ & & \downarrow h & \nearrow f & \\ & & J & & \end{array}$$

gdzie homomorfizm $f : R \rightarrow J$ zdefiniowany jest wzorem $f(r) = rj$, dla $r \in R$. Wobec lematu Baer'a moduł J jest injektywny. $\square$

Twierdzenie 12.3. Niech R będzie pierścieniem z jedynką, niech M będzie lewym R -modułem unitarnym. Wówczas istnieje moduł injektywny J , w który zanurza się w M .

Dowód. Ustalmy pierścień z jedynką R i lewy unitarny R -moduł M . Rozważmy rodzinę

$$\mathcal{F} = \{(I, \phi) : I \text{ jest ideałem lewostronnym pierścienia } R, \phi : I \rightarrow M \text{ jest homomorfizmem}\}.$$

Niech $F = \sum_{(I, \phi) \in \mathcal{F}} \langle x_{(I, \phi)} \rangle$, gdzie $\langle x_{(I, \phi)} \rangle \cong R$ dla $(I, \phi) \in \mathcal{F}$, będzie modułem wolnym o bazie $\{x_{(I, \phi)} : (I, \phi) \in \mathcal{F}\}$. Zdefiniujmy moduł $Q_1(M) = F \times M / \langle \{(-rx_{(I, \phi)}, \phi(r)) : (I, \phi) \in \mathcal{F}, r \in I\} \rangle$ oraz oznaczmy przez $\nu : F \times M \rightarrow Q_1(M)$ epimorfizm kanoniczny dany wzorem

$$\nu(f, m) = (f, m) + \langle \{(-rx_{(I, \phi)}, \phi(r)) : (I, \phi) \in \mathcal{F}, r \in I\} \rangle.$$

Wówczas oczywiście $\ker \nu = \langle \{(-rx_{(I, \phi)}, \phi(r)) : (I, \phi) \in \mathcal{F}, r \in I\} \rangle$. Zdefiniujmy ponadto homomorfizm $w_1 : M \rightarrow Q_1(M)$ wzorem

$$w_1(m) = \nu(0, m)$$

oraz, dla ustalonego $(I, \phi) \in \mathcal{F}$, parę homomorfizmów $w_\phi : R \rightarrow F \times M$ oraz $\phi' : R \rightarrow Q_1(M)$ wzorami:

$$w_\phi(r) = (rx_{(I, \phi)}, 0)$$

oraz

$$\phi'(r) = \nu \circ w_\phi(r).$$

Wówczas, dla ustalonych $(I, \phi) \in \mathcal{F}$ oraz $r \in R$:

$$\phi'(r) = \nu(rx_{(I, \phi)}, 0) = \nu(0, \phi(r)) = w_1(\phi(r)),$$

a zatem, dla ustalonego $(I, \phi) \in \mathcal{F}$, diagram

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{w} & R & & \\ \downarrow \phi & & \searrow w_\phi & & \downarrow \phi' \\ & F \times M & & & \\ \uparrow \iota_2 & & \searrow \nu & & \\ M & \xrightarrow{w_1} & Q_1(M) & & \end{array}$$

jest przemienny, przy czym $\iota_2 : M \rightarrow F \times M$ oznacza tu kanoniczne włożenie.

Pokażemy, że w_1 jest monomorfizmem. Ustalmy w tym celu $m \in \ker w_1$. Wówczas $(0, m) \in \ker \nu$, a więc dla pewnych $(I_1, \phi_1), \dots, (I_n, \phi_n) \in \mathcal{F}$ i dla pewnych $r_1, \dots, r_n \in R$ zachodzi:

$$(0, m) = \sum_{i=1}^n (-r_i x_{(I_i, \phi_i)}, \phi_i(r_i)).$$

Ponieważ moduł F jest wolny, więc w szczególności $r_1 = \dots = r_n = 0$, skąd $\phi_i(r_i) = 0$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$, a tym samym $m = 0$.

Wobec tego możemy identyfikować elementy $m \in M$ i $w_1(m) \in Q_1(M)$. Tym samym, dla ustalonego $(I, \phi) \in \mathcal{F}$ i dla $r \in I$:

$$\phi(r) = w_1(\phi(r)) = v(w_\phi(r)) = r \cdot v \circ w_\phi(1_R),$$

czyli $\phi(r) = r \cdot j$, dla pewnego $j \in Q_1(M)$.

Zdefiniujmy liczbę α warunkiem $|R| = \aleph_\alpha$, gdy R jest nieskończony oraz $\alpha = -1$, gdy R jest skończony. Dla dowolnej liczby porządkowej $\xi < \omega_{\alpha+1}$ definiujemy rekurencyjnie

- $Q_0(M) = M$,
- $Q_\xi(M) = Q_1(Q_\zeta(M))$, gdy $\xi = \zeta + 1$,
- $Q_\xi(M) = \bigcup_{\eta < \xi} Q_\eta(M)$, gdy ξ jest graniczna.

Niech

$$J = \bigcup_{\xi < \omega_{\alpha+1}} Q_\xi(M).$$

Oczywiście $M \hookrightarrow J$.

Pokażemy, że Q jest injektywny. Ustalmy lewostronny ideał $I \triangleleft R$ i homomorfizmu $h : I \rightarrow J$. Wówczas $|\text{im } h| \leq \aleph_\alpha$, więc dla pewnej liczby porządkowej $\xi < \omega_{\alpha+1}$ zachodzi $\text{im } h \subset Q_\xi(M)$. Rozważmy diagram:

$$\begin{array}{ccccc}
 I & \xrightarrow{\quad w \quad} & R & & \\
 \downarrow \phi & & \swarrow w_\phi & & \\
 & F \times Q_\xi(M) & & & \\
 \downarrow \text{im } h & \nearrow \iota_2 & \searrow \nu & & \downarrow \phi' \\
 Q_\xi(M) & \xrightarrow{\quad w_1 \quad} & Q_1(Q_\xi(M)) = Q_{\xi+1}(M) & &
 \end{array}$$

Istnieje zatem przedłużenie $\phi' : R \rightarrow Q_{\xi+1}(M) \subset J$ homomorfizmu h , a więc h jest postaci

$$h(r) = r \cdot j,$$

dla pewnego $j \in J$. Wobec Wniosku 12.1, moduł J jest injektywny. □

Twierdzenie 11.1 (1) i (2) można teraz prosto zdualizować w następujący sposób:

Twierdzenie 12.4. *Niech R będzie pierścieniem z jedyneką, J lewym unitarnym R -modułem. Następujące warunki są równoważne:*

- (1) *moduł J jest injektywny;*
- (2) *każdy ciąg dokładny*

$$0 \rightarrow J \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

rozszczepia się;

- (3) *J jest składnikiem prostym każdego modułu, którego jest podmodułem.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2): Załóżmy, że ciąg

$$0 \rightarrow J \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

jest dokładny. W szczególności, w diagramie

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & J & \xrightarrow{f} & M \\ & & \downarrow id_J & \nearrow h & \\ & & J & & \end{array}$$

wiersz jest dokładny, istnieje więc homomorfizm $h : M \rightarrow J$ taki, że $h \circ f = id_J$. Wobec Twierdzenia 9.3 ciąg $0 \rightarrow J \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ rozszczepia się.

(2) $\Rightarrow$ (3): Dla dowolnego modułu M , dla którego J jest podmodułem, ciąg

$$0 \rightarrow J \xrightarrow{\subseteq} M \xrightarrow{\kappa} M/J \rightarrow 0$$

jest rozszczepialnym ciągiem dokładnym, więc $\text{im } J \cong J$ jest składnikiem prostym M .

(3) $\Rightarrow$ (1): Wobec Twierdzenia 12.3 J jest podmodułem pewnego modułu injektywnego Q . Wobec (3) oraz Twierdzenia 12.1, J jest injektywny. $\square$

Na zakończenie podamy jeszcze zastosowanie Wniosku 12.1 (a więc, pośrednio, lematu Baer'a) do wskazania ważnego przykładu modułów injektywnych.

Definicja 12.2. Niech $(D, +)$ będzie grupą abelową. Grupę D nazywamy **podzielną**, jeżeli

$$\forall y \in D \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \exists x \in D (nx = y).$$

Przykład:

(1) Grupa $\mathbb{Q}$ jest podzielna.

Uwaga 12.1. Każda grupa abelowa podzielna jest $\mathbb{Z}$ -modułem injektywnym.

Dowód. Niech $(D, +)$ będzie grupą abelową podzielną. Jedynymi ideałami pierścienia $\mathbb{Z}$ są ideały główne (n) , $n \in \mathbb{Z}$, a zatem jeżeli $h : (n) \rightarrow D$ jest homomorfizmem, to istnieje $x \in D$ takie, że $h(n) = nx$. Zdefiniujemy $f : \mathbb{Z} \rightarrow D$ wzorem

$$f(m) = mx.$$

Wówczas f jest homomorfizmem oraz $h = f \circ w$, gdzie $w : (n) \hookrightarrow \mathbb{Z}$ jest kanonicznym włożeniem. $\square$