

11. WYKŁAD 11: MODUŁY PROJEKTYWNE.

Twierdzenie 11.1. *Niech R będzie pierścieniem, P lewym R -modułem. Następujące warunki są równoważne:*

- (1) *dla każdego R -modułu N i homomorfizmu $h : P \rightarrow N$ zachodzi następujący warunek: dla każdego lewego R -modułu M i dla każdego epimorfizmu $g : M \rightarrow N$ istnieje homomorfizm $f : P \rightarrow M$ taki, że $h = g \circ f$; inaczej: diagram*

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ f \swarrow & \downarrow h & \\ M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

w którym dolny wiersz jest dokładny, jest przemienny;

- (2) *każdy ciąg dokładny*

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$$

rozszczepia się;

- (3) *P jest składnikiem prostym pewnego lewego R -modułu M o następującej własności: istnieje podzbiór $\{f_i : i \in I\}$ zbioru M taki, że dla każdego lewego R -modułu N i jego rodziny elementów $\{h_i : i \in I\}$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $h : M \rightarrow N$ taki, że $h(f_i) = h_i$.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2): załóżmy, że $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$ jest ciągiem dokładnym. W diagramie

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow id & \\ N & \xrightarrow{g} & P \longrightarrow 0 \end{array}$$

wiersz jest dokładny, istnieje więc homomorfizm $f : P \rightarrow N$ taki, że $g \circ f = id_P$. Wobec Twierdzenia 9.3 ciąg $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$ rozszczepia się.

(2) $\Rightarrow$ (3): wobec Twierdzenia 10.6 istnieją lewy R -moduł M o następującej własności:

istnieje podzbiór $\{f_i : i \in I\}$ zbioru M taki, że dla każdego lewego R -modułu N i jego rodziny elementów $\{h_i : i \in I\}$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $h : M \rightarrow N$ taki, że $h(f_i) = h_i$

oraz epimorfizm $g : M \rightarrow P$. Niech $K = \ker g$. Wówczas ciąg

$$0 \rightarrow K \hookrightarrow M \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$$

jest dokładny, a więc rozszczepialny. Tym samym P jest składnikiem prostym modułu M .

(3) $\Rightarrow$ (1): niech M będzie lewym R -modułem o następującej własności:

istnieje podzbiór $\{f_i : i \in I\}$ zbioru M taki, że dla każdego lewego R -modułu N i jego rodziny elementów $\{h_i : i \in I\}$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $h : M \rightarrow N$ taki, że $h(f_i) = h_i$

oraz niech $M = P \oplus Q$. Niech $\pi : M \rightarrow P$ będzie rzutowaniem. Ustalmy moduły K i L , homomorfizm $h : P \rightarrow L$ i epimorfizm $g : K \rightarrow L$:

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ & \downarrow \pi & \\ & P & \\ & \downarrow h & \\ K & \xrightarrow[g]{\text{"na"}} L & \longrightarrow 0. \end{array}$$

Wobec Twierdzenia 10.8 istnieje homomorfizm $f_1 : M \rightarrow L$ taki, że $h \circ \pi = g \circ f_1$. Tym samym odwzorowanie $f : P \rightarrow L$ dane wzorem $f = f_1 \upharpoonright_P$ spełnia warunek $h = g \circ f$. $\square$

Uwaga 11.1. Powyższe twierdzenie upraszcza się nieznacznie, gdy R jest pierścieniem z jedyneką, a P lewym unitarnym R -modułem. Wówczas warunek (3) przybiera brzmienie:

(3) P jest składnikiem prostym pewnego modułu wolnego.

Definicja 11.1. Niech R będzie pierścieniem, P lewym R -modułem. Jeżeli P spełnia jeden (a zatem wszystkie) z równoważnych warunków Twierdzenia 11.1, to P nazywamy **modułem projektywnym**.

Wniosek 11.1. Każdy moduł wolny nad pierścieniem z jedyneką jest projektywnym modułem unitarnym.

Twierdzenie odwrotne do Wniosku 11.1 nie jest prawdziwe:

Przykład:

- (1) Niech R_1 i R_2 będą pierścieniami z jedyneką, niech $R = R_1 \times R_2$. R jest oczywiście lewym R -modułem. Oznaczmy $r_1 = (1_{R_1}, 0_{R_2})$ oraz $r_2 = (0_{R_1}, 1_{R_2})$. Wtedy $R = \langle r_1 \rangle + \langle r_2 \rangle$ oraz $\langle r_1 \rangle \cap \langle r_2 \rangle = \{0_R\}$, wobec czego $\langle r_1 \rangle$ jest składnikiem prostym R , a więc modułem projektywnym. Dla dowolnych $a_1, \dots, a_k \in R$ zachodzi:

$$r_2 a_1 r_1 + \dots + r_2 a_k r_1 = 0$$

oraz $r_2 \neq 0$, a więc $a_1 r_1, \dots, a_k r_1$ są liniowo zależne. Tym samym $\langle r_1 \rangle$ nie ma bazy, więc nie może być wolny.

Okazuje się jednak, że niektóre moduły projektywne są wolne. Omówimy teraz kilka znanych przypadków, w których ma to miejsce.

Twierdzenie 11.2 (Cartana-Eilenberga). Niech R będzie przemiennym pierścieniem lokalnym z jedyneką, niech P będzie skończenie generowanym lewym unitarnym R -modułem projektywnym. Wówczas P jest wolny.

Lemat 11.1. Niech R będzie pierścieniem z jedyneką, P skończenie generowanym lewym unitarnym R -modułem projektywnym. Wówczas istnieje skończenie generowany lewy unitarny R -moduł projektywny Q taki, że $P \oplus Q$ jest modułem wolnym skończonej rangi.

Dowód. Niech N będzie lewym unitarnym R -modułem takim, że $F = P \oplus N$ jest wolny. Niech $\{f_i : i \in I\}$ będzie bazą F , a $m_1, \dots, m_g$ zbiorem generatorów P . Każdy m_i jest kombinacją liniową skończonej liczby f_i , istnieje więc skończony podzbiór $J \subset I$ taki, że $F_0 = \sum_{j \in J} \langle f_j \rangle \supset P$.

Pokażemy, że $F_0 = P \oplus (N \cap F_0)$. Istotnie, ponieważ $F_0 \subset F = P \oplus N$, więc $P \cap (N \cap F_0) = \{0\}$. Ponadto $F_0 \supset P + (N \cap F_0)$. Skoro dla $f_0 \in F$ mamy $f_0 = m + n$, dla pewnych $m \in P$, $n \in N$, to $n = f_0 - m \in F_0$. Zatem $F_0 \subset P + (N \cap F_0)$.

Ponieważ F_0 jest skończenie generowanym modułem wolnym, więc $F_0/P \cong N \cap F_0$ jest skończenie generowany. Kładąc $Q = N \cap F_0$ otrzymujemy tezę. $\square$

Przechodzimy teraz do dowodu Twierdzenia 11.2.

Dowód. Niech Q będzie takim skończenie generowanym lewym unitarnym R -modułem projektywnym, że $F = P \oplus Q$ jest modułem wolnym skończonej rangi. Powiedzmy, że $F = \sum_{i=1}^n \langle f_i \rangle$. Ponieważ R jest przemiennym pierścieniem lokalnym z jedyneką, zawiera dokładnie jeden ideał maksymalny I równy zbiorowi wszystkich elementów nieodwracalnych R , w konsekwencji więc $k = R/I$ jest ciałem. Wybierzmy bazę $(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n)$ przestrzeni wektorowej k^n i zdefiniujmy odwzorowanie $\Phi : F \rightarrow k^n$ wzorem:

$$\Phi(a_1 f_1 + \dots + a_n f_n) = (a_1 + I)\bar{f}_1 + \dots + (a_n + I)\bar{f}_n.$$

Oznaczmy $\bar{F} = \Phi(F)$, $\bar{P} = \Phi(P)$ oraz $\bar{Q} = \Phi(Q)$. Wówczas $\bar{F} = \bar{P} \oplus \bar{Q}$ oraz $\bar{P}, \bar{Q} < \bar{F}$. Możemy zatem wybrać elementy $m_1, \dots, m_l \in P$, $m_{l+1}, \dots, m_n \in Q$ takie, że $\bar{m}_1 = \Phi(m_1), \dots, \bar{m}_l = \Phi(m_l)$ jest bazą $\bar{P}$, $\bar{m}_{l+1} = \Phi(m_{l+1}), \dots, \bar{m}_n = \Phi(m_n)$ jest bazą $\bar{Q}$ oraz $\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n$ jest bazą $\bar{F}$. Niech

$$m_i = b_{1i} f_1 + \dots + b_{ni} f_n, \text{ dla } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Wtedy $B = [b_{ji}] \in R^n$ jest macierzą przejścia od bazy $(f_1, \dots, f_n)$ do układu $(m_1, \dots, m_n)$, zaś $\bar{B} = [\bar{b}_{ji}] \in k^n$, gdzie $\bar{b}_{ji} = \Phi(b_{ji})$, jest macierzą przejścia od bazy $(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n)$ do bazy $(\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n)$. Tym samym $\det \bar{B} \neq 0_{R/I} = I$, a więc $\det B \notin I$, co oznacza, że $\det B$ jest elementem odwracalnym pierścienia R , a więc i macierz B jest odwracalna, co w konsekwencji oznacza, że układ $(m_1, \dots, m_n)$ jest bazą F . Zatem dla dowolnego $m \in M$ istnieje jednoznaczne przedstawienie postaci

$$m = a_1 m_1 + \dots + a_l m_l + q, \text{ dla pewnych } a_1, \dots, a_l \in R, q \in Q,$$

skąd, w szczególności, dla $m \in P$:

$$m = a_1 m_1 + \dots + a_l m_l.$$

Wobec tego moduł P jest wolny. □

Twierdzenie to można istotnie wzmocnić, a mianowicie można pominąć w nim założenie tego, że pierścień R jest przemienny, a moduł P skończenie generowany:

Twierdzenie 11.3 (Kaplansky'ego). *Niech R będzie pierścieniem lokalnym z jedyneką, niech P będzie lewym unitarnym R -modułem projektywnym. Wówczas P jest wolny.*²

Z punktu widzenia geometrii algebraicznej ważnym zagadnieniem jest wiedzieć, które moduły projektywne nad pierścieniami wielomianów są wolne. Kompletną odpowiedź na tak postawione pytanie jest następujące twierdzenie z połowy lat 70-tych:

Twierdzenie 11.4 (Seshardi-Quillena-Suslina). *Niech F będzie ciałem, niech P będzie lewym unitarnym $F[x_1, \dots, x_n]$ -modułem projektywnym. Wówczas P jest wolny.*³

Uwaga 11.2. *Niech R będzie pierścieniem, niech M będzie lewym R -modułem. Wówczas M jest homomorficznym obrazem pewnego modułu projektywnego.*

Dowód wynika wprost z Twierdzeń 10.6 i 11.1.

Twierdzenie 11.5. *Niech R będzie pierścieniem, niech $\{P_i : i \in I\}$ będzie rodziną lewych R -modułów. Wówczas $\sum_{i \in I} P_i$ jest modułem projektywnym, gdy P_i , $i \in I$, są modułami projektywnymi.*

²I. Kaplansky, *Projective modules*, Ann. of Math. (2) 68 (1968), 372 – 380.

³twierdzenie pokazane przez Cartana i Eilenberga dla $n = 1$ około 1950 roku, dla $n > 1$ sformułowane jako “hipoteza Serre’a” w 1955, dla $n = 2$ wykazane w 1958 przez Seshardi. Ogólny przypadek został rozwiązany w dwóch niezależnych pracach: D. Quillen, *Projective modules over polynomial rings*, Invent. Math. 36 (1976), 167 – 171 oraz A. Suslin, *Projective modules over polynomial rings are free*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 229 (1976), 1063 – 1066.

Dowód. ($\Rightarrow$): załóżmy, że $\sum_{i \in I} P_i$ jest modulem projektywnym i ustalmy $i \in I$. Zauważmy, że wówczas

$$\sum_{i \in I} P_i = P_i \oplus \sum_{j \in I \setminus \{i\}} P_j.$$

Niech $\pi : \sum_{i \in I} P_i \rightarrow P_i$ będzie zatem rzutowaniem. Ustalmy module K i L , homomorfizm $h : P_i \rightarrow L$ i epimorfizm $g : K \rightarrow L$:

$$\begin{array}{ccc} \sum_{i \in I} P_i & & \\ \downarrow \pi & & \\ P_i & & \\ \downarrow h & & \\ K \xrightarrow{g} L & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Ponieważ $\sum_{i \in I} P_i$ jest projektywny, istnieje homomorfizm $f_1 : \sum_{i \in I} P_i \rightarrow L$ taki, że $h \circ \pi = g \circ f_1$. Tym samym odwzorowanie $f : P_i \rightarrow L$ dane wzorem $f = f_1 \upharpoonright_{P_i}$ spełnia warunek $h = g \circ f$.

($\Leftarrow$): Załóżmy, że P_i , $i \in I$, są projektywne. Niech $\iota_i : P_i \rightarrow \sum_{i \in I} P_i$, $i \in I$, będą kanonicznymi monomorfizmami. Załóżmy także, że w diagramie

$$\begin{array}{ccc} \sum_{i \in I} P_i & & \\ \downarrow h & & \\ M \xrightarrow{g} N & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

dolny wiersz jest dokładny. Dla ustalonego $i \in I$ rozważmy diagram

$$\begin{array}{ccc} P_i & & \\ \downarrow \iota_i & & \\ \sum_{i \in I} P_i & & \\ \downarrow h & & \\ M \xrightarrow{g} N & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Ponieważ P_i jest projektywny, więc istnieje homomorfizm $f_i : P_i \rightarrow M$ taki, że $g \circ f_i = h \circ \iota_i$. Dalej, wobec własności uniwersalnej koproduktu modułów, istnieje dokładnie jeden homomorfizm $f : \sum_{i \in I} P_i \rightarrow M$ taki, że

$$f \circ \iota_i = f_i.$$

Wówczas $g \circ f \circ \iota_i = g \circ f_i = h \circ \iota_i$, dla $i \in I$, skąd wynika $g \circ f = h$. □

Jako przykład zastosowań powyższego twierdzenia powrócimy na chwilę do rozważań kiedy dany moduł projektywny jest wolny i w szczególności udowodnimy twierdzenie Seshardi-Quillena-Suslina w przypadku $n = 1$.

Lemat 11.2. Niech R będzie pierścieniem, niech M będzie modulem, niech $\{M_i : i \in I\}$ będzie rodziną podmodułów modułu M , niech $(I, \leq)$ będzie zbiorem dobrze uporządkowanym o elemencie najmniejszym 0 , w którym, dla danego elementu $i \in I$, przez $i + 1$ oznaczamy najmniejszy element zbioru $\{j \in I : i \leq j \wedge i \neq j\}$. Niech ponadto spełnione będą następujące warunki:

- (1) jeśli $i \leq j$, to $M_i \subset M_j$,
- (2) $M_0 = \{0\}$,

- (3) jeśli i jest elementem granicznym zbioru I , to $M_i = \bigcup_{j < i} M_j$,
 (4) $M = \bigcup_{i \in I} M_i$,
 (5) moduły ilorazowe M_{i+1}/M_i są projektywne.

Wówczas $M \cong \sum_{i \in I} M_{i+1}/M_i$.

Dowód. Ustalmy $i \in I$ i rozważmy ciąg dokładny

$$0 \rightarrow M_i \xrightarrow{id_{M_i}} M_{i+1} \xrightarrow{\kappa} M_{i+1}/M_i \rightarrow 0.$$

Ponieważ moduł M_{i+1}/M_i jest projektywny, więc ciąg się rozszczepia. Tym samym istnieje podmoduł M'_i modułu M_{i+1} taki, że $M_{i+1} = M'_i \oplus M_i$. Wobec Wniosku 9.2 $M'_i \cong M_{i+1}/M_i$, a zatem M'_i jest projektywny.

Pokażemy, że $M = \sum_{i \in I} M'_i$. Niech $M' = \langle \bigcup_{i \in I} M'_i \rangle$. Pokażemy najpierw, że $M' = \sum_{i \in I} M'_i$. W tym celu wystarczy pokazać, że dowolny element $m \in M'$ ma jednoznaczne przedstawienie postaci $m'_1 + \dots + m'_n$, dla $m'_i \in M'_{k_i}$. Przypuśćmy bowiem, że dla pewnego elementu $m \in M'$ istnieją dwa przedstawienia:

$$m = m'_1 + \dots + m'_n = m''_1 + \dots + m''_n, \text{ dla } m'_i, m''_i \in M'_{k_i}.$$

Wówczas $(m'_1 - m''_1) + \dots + (m'_n - m''_n) = 0$. Niech $m_1 = m'_1 - m''_1, \dots, m_n = m'_n - m''_n$. Stąd $m_1 + \dots + m_n = 0$, $m_i \in M'_{k_i}$, a zatem $m_n = -(m_1 + \dots + m_{n-1})$. Zmieniając ewentualnie numerację możemy założyć, że $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$, a wówczas, wobec (1), $m_1, \dots, m_{n-1} \in M_{k_n}$ oraz jednocześnie $m_1, \dots, m_{n-1} \in M'_n$. Zatem $m_n = -(m_1 + \dots + m_{n-1}) \in M_{k_n} \cap M'_{k_n} = \{0\}$. Podobnie możemy pokazać, że $m_1 = \dots = m_{n-1} = 0$.

Pozostaje pokazać, że $M' = M$. Oczywiście $M' \subset M$, przypuśćmy zatem, że $M' \subsetneq M$. Wobec (4) istnieje $j \in J$ takie, że $M_j \not\subset M'$. Niech i_0 będzie najmniejszym j o tej własności. Wobec (3), i_0 nie jest elementem granicznym I , w przeciwnym bowiem razie $M_{i_0} = \bigcup_{j < i_0} M_j$, a więc dla pewnego $j < i_0$ zachodziłoby $M_j \not\subset M'$. Tym samym $i_0 = i_1 + 1$, dla pewnego $i_1 \in I$. Niech $m_{i_0} \in M_{i_0}$ będzie takim elementem, że $m_{i_0} \notin M'$. Ponieważ $M_{i_0} = M_{i_1} \oplus M'_{i_1}$, więc $m_{i_0} = m_{i_1} + m'_{i_1}$, dla pewnych $m_{i_1} \in M_{i_1}$, $m'_{i_1} \in M'_{i_1}$. Skoro $i_1 < i_0$, to $M_{i_1} \subset M'$. Oczywiście też $M'_{i_1} \subset M'$. Zatem $m_{i_0} \in M'$, co daje sprzeczność. $\square$

Twierdzenie 11.6. Niech R będzie pierścieniem z jedyneką, niech każdy lewostronny ideał pierścienia R będzie lewym unitarnym R -modułem projektywnym (lub, odpowiednio, wolnym). Wówczas każdy podmoduł dowolnego lewego unitarnego R -modułu projektywnego jest projektywny (lub, odpowiednio, wolny).

Dowód. Ponieważ moduł projektywny jest podmodułem modułu wolnego, wystarczy pokazać, że podmoduł modułu wolnego jest projektywny (lub, odpowiednio, wolny).

Niech F będzie modułem wolnym z bazą $\{f_i : i \in I\}$, zaś $(I, \leq)$ zbiorem dobrze uporządkowanym, niech $F_i = \langle \{f_j : j < i\} \rangle$. Ustalmy podmoduł F' modułu F . Wówczas rodzina podmodułów $F'_i = F' \cap F_i$ spełnia warunki (1) – (5) poprzedniego lematu względem F' .

Pokażemy, że F'_{i+1}/F'_i są izomorficzne z ideałami pierścienia R . Dla ustalonego $i \in I$ zdefiniujmy odwzorowanie $\phi_i : \{f_j : j \in I\} \rightarrow R$ warunkiem

$$\phi_i(f_j) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i \neq j \\ 1, & \text{gdy } i = j. \end{cases}$$

Istnieją zatem homomorfizmy $\phi_i^* : F \rightarrow R$ takie, że $\phi_i^* \upharpoonright_{\{f_j : j \in I\}} = \phi_i$, $i \in I$. Wówczas $\ker \phi_i^* \cap F'_{i+1} = F'_i$, więc $F'_{i+1}/F'_i = F'_{i+1}/\ker \phi_i^* \cap F'_{i+1} \cong \phi_i^*(F'_{i+1}) \subset R$. Ponadto $\phi_i^*(F'_{i+1})$ jest podmodułem modułu R , a więc ideałem pierścienia R .

Wobec założenia, moduły F'_{i+1}/F'_i są projektywne (lub, odpowiednio, wolne). Stosując Twierdzenie 11.5 (lub, odpowiednio, odwołując się wprost do definicji modułu wolnego), otrzymujemy zatem, że F' jest projektywny (lub, odpowiednio, wolny). $\square$

Wniosek 11.2. *Niech R będzie pierścieniem z jedynką, niech każdy lewostronny ideał pierścienia R będzie modulem wolnym. Wówczas każdy lewy unitarny R -moduł projektywny jest wolny.*

Przykłady:

- (2) Niech R będzie pierścieniem ideałów głównych z jedynką. Wówczas każdy lewy unitarny R -moduł projektywny jest wolny.
- (3) Niech F będzie ciałem. Wówczas każdy lewy unitarny $F[x]$ -moduł projektywny jest wolny.

Definicja 11.2. *Pierścień R nazywamy **pierścieniem dziedzicznym**, jeżeli każdy podmoduł dowolnego lewego R -modułu projektywnego jest projektywny.*

*Pierścień R nazywamy **półprostym**, jeżeli każdy lewy R -moduł jest projektywny.*